

ΣΕΜΦΕ, ΕΞΕΤΑΣΗ στη Θεωρία Συνόλων, 4/03/2009

ZHTHMA 1. Αν A και B σύνολα, ορίστε τις πράξεις $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}}$ και $(\overline{\overline{A}}) \overline{\overline{B}}$. Αν $2 = \{0, 1\}$ αποδείξτε ότι $\overline{\mathcal{P}(A)} = 2^{\overline{A}}$. Ισχύει ότι $\overline{\mathbb{R}} = 2^{\aleph_0}$ και γιατί; Χρησιμοποιώντας απλούς χανόνες πληθυκής αριθμητικής, αποδείξτε ότι $\overline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}}$. Αποδείξτε ότι αν $A \sim (A \times 2)$ τότε $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$.

ZHTHMA 2. Διατυπώστε το αξίωμα της αντικατάστασης. Χρησιμοποιήστε το για να αποδείξτε την αρχή του διαχωρισμού.

Έστω A σύνολο. Χρησιμοποιώντας την αρχή του διαχωρισμού αποδείξτε ότι υπάρχει σύνολο B ώστε $B \notin A$.

Πώς προχύπτει από τα παραπάνω ότι δεν υπάρχει το σύνολο όλων των συνόλων;

ZHTHMA 3. 1. Διατυπώστε το λήμμα του Zorn.

2. Έστω A δοθέν σύνολο και έστω B το σύνολο των συναρτήσεων f ώστε $\text{dom}(f) \subseteq \mathcal{P}(A)$, $\text{range}(f) \subseteq A$ και $f(X) \in X$, για όλα τα X στο $\text{dom}(f)$. Αποδείξτε ότι το λήμμα του Zorn μπορεί να εφαρμοστεί στη μερική διάταξη (B, \subseteq) . Αποδείξτε ότι κάθε μεγιστικό στοιχείο είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}$. Ακολούθως συμπεράνατε ότι το λήμμα του Zorn συνεπάγεται το αξίωμα της επιλογής.

ZHTHMA 4. Ορίστε πότε ένα σύνολο είναι μια καλή διάταξη ενός συνόλου A . Χρησιμοποιώντας το αξίωμα του διαχωρισμού αποδείξτε ότι για κάθε σύνολο A υπάρχει το σύνολο B όλων των καλών διατάξεων του A .

Στη συνέχεια, θέτοντας $A = \alpha$ και εφαρμόζοντας το αξίωμα της αντικατάστασης στο B , χωρίς τη χρήση του αξιώματος της επιλογής, αποδείξτε ότι για κάθε διατακτικό α υπάρχει διατακτικός β ώστε $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$ (δηλαδή $\alpha \prec \beta$). [Μπορείτε να χρησιμοποιείστε τις γνωστές προτάσεις για τους διατακτικούς, όπως π.χ. ότι κάθε καλή διάταξη είναι ισομορφική με ένα και μοναδικό διατακτικό και ότι δεν υπάρχει σύνολο που να περιλαμβάνει όλους τους διατακτικούς].

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. Καλή Επιτυχία!