

## ΑΥΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ Ι-χώροι Hilbert

### 8<sup>ο</sup> Εξάμηνο ΣΕΜΦΕ 2010

Ασκηση 0.1. Είναι:

$$(Fg)(T) = \int_0^T e^{-T-s} g(s) ds = e^{-T} \int_0^T e^s g(s) ds = e^{-T} \langle f, g \rangle,$$

όπου  $f(t) = e^t$  και  $g$  πραγματική, διότι από ανισότητα Cauchy-Schwarz  $|Fg)(T)| = e^{-T} |\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$  η ισότητα ισχύει αν  $g = cf$ ,  $c$  σταθερά. Όμως  $\|g\| = 1$ , οπότε

$$1 = \int_0^T c^2 |f(t)|^2 dt = \int_0^T c^2 e^{2t} dt = (1/2)c^2(e^{2T} - 1) \Rightarrow c = \sqrt{\frac{2}{e^{2T} - 1}}.$$

Άρα  $g(t) = \sqrt{\frac{2}{e^{2T}-1}} e^{2t}$ ,  $t \in [0, T]$  με

$$(Fg)(T) = e^{-T} \int_0^T e^s \sqrt{\frac{2}{e^{2T}-1}} e^s ds = \dots = e^{-T} \sqrt{\frac{e^{2T}-1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-e^{-2T})}.$$

Ασκηση 0.2. Έστω  $x_0 \in X$ , τέτοιο ώστε  $f(x_0) \neq 0$  και  $M = [x_0]$ . Για κάθε  $x \in X$ , θέτουμε  $z = x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0$ , οπότε  $z \in \ker f$  και  $x = z + \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0 \in \ker f + M$ . Επιπλέον  $\ker f \cap M = \{0\}$ , οπότε στην πραγματικότητα είναι ευθύ αλγεβρικό άθροισμα  $X = \ker f + M$ . Έστω  $N$  ψηφιζόρων τοψ  $X$  τέτοιος ώστε  $\ker f \subsetneq N$ . Θεωρούμε  $x_0 \in N \setminus \ker f$ . Τότε  $X = \ker f + [x_0] \subseteq \ker f + N = N \Rightarrow X = N$ , αφού  $\ker f \subseteq N$ .

Ασκηση 0.3. Επειδή  $M = [z]^\perp$  είναι κλειστός υπόχωρος του  $X$ , αν  $M = X$  τότε  $X^\perp = H^\perp = \{0\} = M^\perp = [z]$ , άτοπο διότι  $z \neq 0$ . Άρα  $M \subsetneq X$ . έστω τώρα  $x_0 \in X \setminus M$  και ότι υπάρχει  $y_0 \in M$  τέτοιο ώστε  $\|x_0 - y_0\| = D(x_0, M)$ . Τότε  $(x_0 - y_0) \perp M = [z]^\perp$ , οπότε  $x_0 - y_0 = cz$ . Όμως  $x_0 - y_0 \in X$ , ενώ  $z \notin X$ , άτοπο.

Ασκηση 0.4. (i) Σε κάθε  $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$  αντιστοιχεί η πεπερασμένη ακολουθία  $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$  στοιχείο του  $c_0$  και αντιστρόφως. Άρα  $X \cong c_0$  και  $\overline{X} = \overline{c_0} = \ell_2$ .

Από τον ορισμό του  $M$  (και έχοντας υπόψη την άσκηση 0.3.), αν  $z = \{(k+1)^{-2} : k \in \mathbb{N}\} \in \ell_2$ , τότε  $M = [z]^\perp$ .

(ii) Προφανώς η  $f$  είναι γραμμική,  $f \neq 0$  (π.χ αν  $p(t) = t^n + t^{n-1} + \dots + t + 1$  τότε  $f(p) = \sum_{k=0}^n (k+1)^{-2} \neq 0$ ),

$$|f(p)|^2 = \left| \sum_{k=0}^n (k+1)^{-2} |a_k|^2 \right|^2 \leq \left( \sum_{k=0}^n (k+1)^{-4} \right) \sum_{k=0}^n |a_k|^2 = \left( \sum_{k=0}^n (k+1)^{-4} \right) \|p\|^2,$$

άρα  $f$  φραγμένο.

(iii) Είναι  $M = \ker f$ , άρα  $M$  κλειστός. Από άσκηση 0.1, ο  $M$  έχει συνδιάσταση 1.

(iv) Έστω ότι για  $x_0 \in X \setminus M$ , υπάρχει  $p_0 \in M$  τέτοιο ώστε  $\|x_0 - p_0\| = d(x_0, M) > 0$ . Θεωρούμε  $z_0 = x_0 - p_0 = c_0 + c_1 t + \cdots + c_m t^m$ . Τότε  $z_0 \perp M$ . Για  $0 \leq k \leq m$ , έστω  $w_k(t) = (k+1)^{-2} t^k - (m+2)^2 t^{m+1}$ . Τότε  $f(w_k(t)) = 0$ , οπότε  $w_k(t) \in M$  για κάθε  $k = 1, 2, \dots, m$ . Επομένως  $w_k(t) \perp z_0$  για κάθε  $k = 1, 2, \dots, m$ . Όμως  $w_k(t) \perp z_0 \Rightarrow 0 = \langle z_0, w_k \rangle = c_k (k+1)^2 \Rightarrow c_k = 0$  για κάθε  $k = 1, 2, \dots, m$ . Άρα  $z_0 = 0$ , άτοπο.

**Άσκηση 0.5.** Είναι:  $\|x_n\| \rightarrow \|x\| \Leftrightarrow \langle x_n, x_n \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle$ . Επομένως, από  $\langle x_n, x \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle$  και το προηγούμενο έχουμε:  $\langle x_n, x_n - x \rangle \rightarrow 0 \Rightarrow \langle x_n - x + x, x_n - x \rangle \rightarrow 0 \Rightarrow \langle x_n - x, x_n - x \rangle - \langle x, x_n - x \rangle \rightarrow 0$ . Όμως  $\langle x, x_n - x \rangle = \langle x, x_n \rangle - \langle x, x \rangle \rightarrow 0$ , οπότε είναι  $\langle x_n - x, x_n - x \rangle \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n - x\| \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \rightarrow x$ .

**Άσκηση 0.6.** Οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου αποδεικνύονται εύκολα, αν βρεθεί η αντιστοίχιση, από το θεώρημα Riesz, στα γραμμικά συναρτησοειδή  $f+g$ ,  $\lambda f$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Αν  $w$  αντιστοιχεί στο  $f+g$  και  $s$  στο  $\lambda f$ , τότε για κάθε  $z \in H$  είναι:  $(f+g)(z) = f(z) + g(z) \Leftrightarrow \langle z, w \rangle = \langle z, x \rangle + \langle z, y \rangle \Leftrightarrow \dots w = x + y$  και  $(\lambda f)(z) = \langle z, s \rangle \Leftrightarrow \lambda \langle z, x \rangle = \langle z, s \rangle \Leftrightarrow \langle z, \bar{\lambda}x \rangle = \langle z, s \rangle \Leftrightarrow s = \bar{\lambda}x$

Έτσι για παράδειγμα  $(\lambda f, g) = \langle y, \bar{\lambda}x \rangle = \lambda \langle y, x \rangle = \lambda(f, g)$ , κ.λ.π.

Τέλος  $H^*$  και  $H$  είναι ισομετρικά ισόμορφοι, αν ο ισομορφισμός  $f \rightarrow x$  είναι ισομετρικός. Είναι  $\|f\|_{(\cdot, \cdot)}^2 = (f, f) = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$ .

**Άσκηση 0.7.** Επειδή  $f \neq 0$  υπάρχει  $z \in (\ker f)^\perp$  τέτοιο ώστε  $f(z) \neq 0$ . Έστω  $x \in X$ . Θεωρούμε  $z_0 = \frac{z}{f(z)}$  και  $\alpha = f(x)$ . Τότε είναι  $x = \alpha z_0 + y$ , όπου  $y = x - \alpha z_0$ , με  $y \in \ker f$ , αφού  $f(y) = f(x) - \alpha f(z_0) = \alpha - \alpha = 0$ .