



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ
ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ / Κατεύθυνση Μαθηματικού Εφαρμογών

ΑΘΗΝΑ 5/7/2010 ΩΡΑ: 18.00

ΘΕΜΑ 1^ο: (βαθ. 1+1,1=2,1)

(α) Αναφέρατε τα παρακάτω βιολογικά πρότυπα με ομοιόμορφη χωρική κατανομή και αρχικές συνθήκες:

(α₁) Πληθυσμιακή μεταβολή:

(i) ειδεσμού τύπου (i) ληψομένου τύπου, (ii) τα (i), (ii) αν επιπλέον έχουν σταθερή ρείωση ανά μονάδα χρόνου ^{ανάλογη των συγκεντρώσεων}.

(α₂) Χημική φονόδρομη αντίδραση δύο στοιχείων:

(α₃) Ραδιενεργή διάσπαση (ειδεσμού ρείωση).

(α₄) Επεξηγήστε το (α₁) (ii) αν επιπλέον πρόκειται για δύο αναγωνιστικά είδη (π.χ. θηρευτής - θήραμα).

(α₅) Αν $x = x(t)$, $y = y(t)$ σε πληθυσμιακά δύο ειδών

(i) $\begin{cases} \dot{x}(t) = ax \\ \dot{y}(t) = by \end{cases}$, $a, b > 0$, (ii) $\begin{cases} \dot{x}(t) = ax - \gamma y \\ \dot{y}(t) = \beta y + \delta x \end{cases}$, $\delta, \delta > 0$ εξηγήστε πληθυσμιακά τα (i), (ii), $(x = x(t), y = y(t))$.

(β) Αν $\begin{cases} \frac{dP}{dt} = P(5-P) - 4 \\ P(0) = P_0, P = P(t), t > 0 \end{cases}$ (Ρ πληθυσμός).

Είναι αυτό το πρόβλημα κάποιο από τα πρότυπα του (α);

Αν η λύση του δίνεται: $P(t) = \frac{4(P_0-1) - (P_0-4)e^{-3t}}{(P_0-1) - (P_0-4)e^{-3t}} \geq 0$.

Βρείτε (i) $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$ για διάφορες τιμές του $P_0 > 0$,

(ii) για ποιά P_0 και πεπερασμένα t έχουμε εξαφάνιση (μηδενισμό) του πληθυσμού;

ΘΕΜΑ 2^ο: (βαθ. 0,5 + 1,6 = 2,1)

(α) (i) Διατυπώστε το θεώρημα Buckingham ή Π.

(ii) Πότε ένας φυσικός νόμος αμείβει ελεύθερος ποσών;

(β) Θέλουμε να προσδιορίσουμε την ισχύ N που αναπτύσσεται ώστε ένα υγρό ρήματος ℓ να κινείται με ταχύτητα V . Υποθέτουμε ότι $N = N(\rho, g, \sigma, \ell, V)$ όπου ρ πυκνότητα νερού, g επιτάχυνση βαρύτητας, σ συντελεστής σκέυσης υλικού (συστάτης) του νερού ($[\sigma] = L^2 T^{-1}$). Δείξτε

ότι $\frac{N}{\rho \ell^2 V^3} = f(Fr, Re)$, $Fr \equiv \text{αριθμός Froude} = \frac{V}{\sqrt{g\ell}}$
 $Re \equiv \text{αριθμός Reynolds} = \frac{V\ell}{\sigma}$ if ανάλογα

ΘΕΜΑ 3^ο: (βαθ. 1 + 1,7 = 2,7)

(α) Να λυθεί (δύο όρους προσέγγισης) με χρήση ιδιομορφικών διατεταχών ή αλγεβρική επίλυση: $\varepsilon x^2 + x - 1 = 0$, $\varepsilon \ll 1$.

Επίλυση. Αν η εξίσωση ήταν τετραγωνίου βαθμού η μέθοδος επιλογής της, εν γένει, παραμένει η ίδια.

(β) Να λυθεί (μία προσέγγιση) ομοιομορφα ως προς ε το πρόβλημα:

$$\begin{cases} \varepsilon y''(t) + \frac{1}{t+1} y'(t) + \varepsilon y(t) = 0, & 0 < t < 1, \\ y(0) = 0, & y(1) = 1. \end{cases}$$

Υπόδ. Με χρήση του αντίστοιχου θεωρήματος ή με δομημένη διακρίσιμότητα ε ότι υπάρχει οριακό σημείο στο $t=0$.

ΘΕΜΑ 4^ο: (βαθ. 1 + 1,6 = 2,6)

(α) Να βρεθεί η στάσιμη συνάρτηση του συναρτισμού

$$J(y) = \int_0^1 [y'(x)^2 + y(x)] dx + k y^2(1), \text{ για } k=0 \text{ ή } k=1$$

$y(0) = 1$, $y(1) = \varepsilon$ είδη ο οριακό σημείο

(β) Να βρεθεί η διαδρομή (δ) (με χρήση λογικών μεταμορφώσεων) ενός αγωγού

με ελάχιστο κόστος παραγωγής, που να συνδέει τα άκρα ο αγωγού με εξίσωση στο οξύ επίπεδο $\delta(x) = x^2$.

Επίσης να συνδεθεί με αντίστοιχη-πλοκή στην θέση $(4,0)$.

ΘΕΜΑ 5^ο: (βαθ. 0,5) | Διακρίσιμη $(\delta) \perp (\varepsilon)$.

Περιγράψτε την μέθοδο Poincaré-Lindstedt για την $u''(t) + \omega^2 u(t) = \varepsilon f(u(t), u'(t))$.

Δίνονται

Συνθήκες ελαστικότητας:

$$L_{y'}(\beta, y(\beta), y'(\beta)) = 0, \\ [L + (\sigma'(x) - \gamma'(x)) L_{y'}]_{x=\beta} = 0.$$

- ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ: 2 εργασιές (βαθ. 3) + Αριστα βαθμός 8
 1 εργασία (βαθ. 1,5) + Αριστα βαθμός 9
 0 -" (βαθ. 0) + Αριστα βαθμός 10