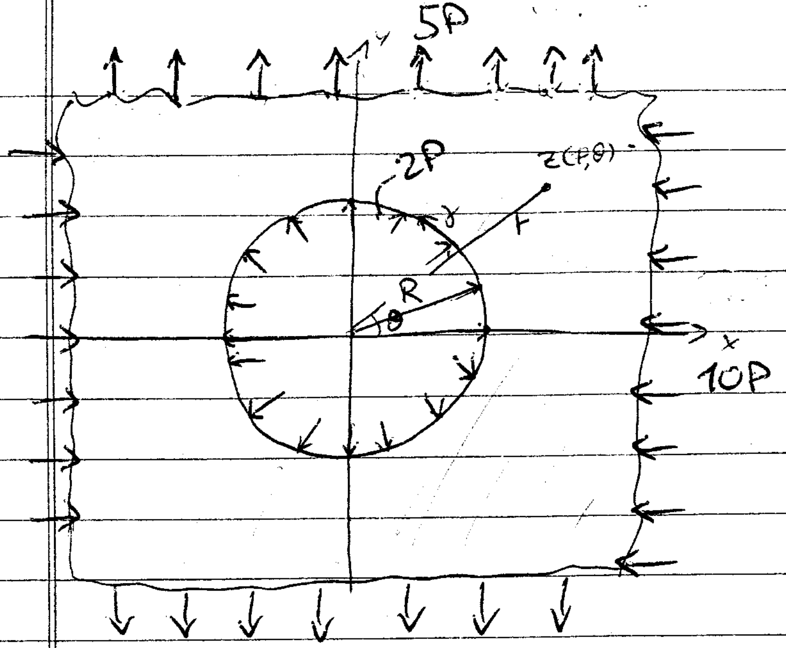
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
& ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΩΝ ΠΕΔΙΩΝ

1η ΑΣΚΗΣΗ: ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ
ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ
ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ



$\sigma_{xx}^{\infty} = -10P$

$\sigma_{yy}^{\infty} = 5P$

Πίεση $= -2P$

$R = 3$ cm

Υλικό Αλουμίνιο:

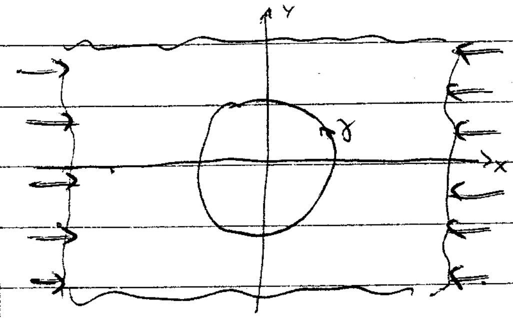
$\nu = 0{,}34$, $\mu = 26$ GPa

Να προσδιοριστεί η κατανομή της τάσης σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ καθώς και τα u_r, u_θ σε απόσταση $r = 2R$ για γωνίες θ: $0, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{6}$

Λύση

Θα χωρίσουμε το πρόβλημα σε τρεις υποπεριπτώσεις, για κάθε τάση πάνω στην άπειρη πλάκα και από την αρχή της επαλληλίας θα βρούμε τα συνολικά μιγαδικά δυναμικά

1η περίπτωση



$\sigma_{xx}^{\infty} = -10P = P_1$

$\sigma_{yy}^{\infty} = 0$

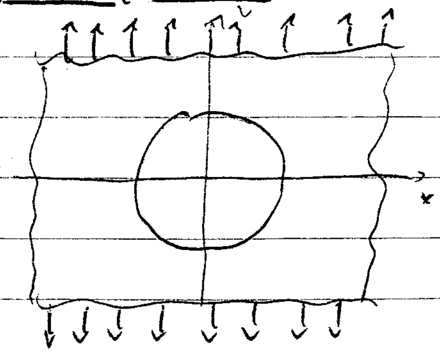
$\sigma_{xy}^{\infty} = 0$

Τα μιγαδικά δυναμικά δίνονται

$$\Phi_1(z) = \frac{P_1}{4}\left(1 - \frac{2R^2}{z^2}\right) \qquad (1)$$

$$\Psi_1(z) = -\frac{P_1}{2}\left(1 - \frac{R^2}{z^2} + \frac{3R^4}{z^4}\right) \qquad (2)$$

2η περίπτωση



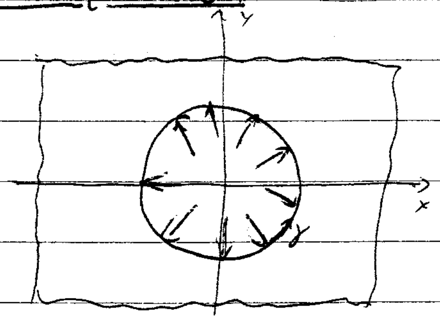
$$\sigma_{xx}^{\infty} = 0$$
$$\sigma_{yy}^{\infty} = SP = P_2$$
$$\sigma_{xy}^{\infty} = 0$$

Περιστρέφουμε τους άξονες κατά $\frac{\pi}{2}$ και αντικαθιστούμε στα μιγαδικά δυναμικά όπου z το iz. Οπότε θα έχουμε:

$$\Phi_2(z) = \frac{P_2}{4}\left(1 + \frac{2R^2}{z^2}\right) \qquad (3)$$

$$\Psi_2(z) = -\frac{P_2}{2}\left(1 + \frac{R^2}{z^2} + \frac{3R^4}{z^4}\right) \qquad (4)$$

3η περίπτωση



$$N = \sigma_{rr}\big|_{\gamma} = -2P = P_3$$

$$T = \tau_{r\theta}\big|_{\gamma} = 0$$

$$\sigma_{xx}^{\infty} = \sigma_{yy}^{\infty} = \sigma_{xy}^{\infty} = 0$$

Έτσι: $\Phi_3(z) = 0 \qquad (5)$

$$\Psi_3(z) = P_3 \frac{R^2}{z^2} \qquad (6)$$

Οπότε τα συνολικά μιγαδικά δυναμικά θα δοθούν ως επαλληλία των (1),(3),(5) και (2),(4),(6) αντίστοιχα

$$\left.\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \Phi_3(z) \\ \Psi(z) &= \Psi_1(z) + \Psi_2(z) + \Psi_3(z) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi(z) = \frac{P_1}{4}\left(1-\frac{2R^2}{z^2}\right) + \frac{P_2}{4}\left(1+\frac{2R^2}{z^2}\right) + 0$$

$$\Rightarrow \Phi(z) = \frac{P_1+P_2}{4} + \frac{(P_2-P_1)}{2}\frac{R^2}{z^2} \qquad (7)$$

αντίστοιχα:

$$\Psi(z) = -\frac{P_1}{2}\left(1-\frac{R^2}{z^2}+\frac{3R^4}{z^4}\right) - \frac{P_2}{2}\left(1+\frac{R^2}{z^2}+\frac{3R^4}{z^4}\right) + P_3\frac{R^2}{z^2}$$

$$\Rightarrow \Psi(z) = -\left(\frac{P_1+P_2}{2}\right) + \left(\frac{2P_3+P_1-P_2}{2}\right)\frac{R^2}{z^2} - \left(\frac{P_1+P_2}{2}\right)\frac{3R^4}{z^4} \qquad (8)$$

- Θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους Kolosov-Muskhelishvili για να υπολογίσουμε τις τάσεις στο τυχαίο σημείο $z(r,\theta)$

$$\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta} = 4\,\mathrm{Re}[\Phi(z)] \qquad (9)$$

$$\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr}+2i\tau_{r\theta} = 2[\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)]e^{2i\theta} \qquad (10)$$

Αντικαθιστούμε τον τύπο της $\Phi(z)$ στη σχέση (9):

$$(9) \overset{(7)}{\Longrightarrow} \sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta} = 4\,\mathrm{Re}\left(\frac{P_1+P_2}{4} + \frac{(P_2-P_1)}{2}\frac{R^2}{z^2}\right) \xrightarrow{z=re^{i\theta}}$$

$$\Rightarrow \sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta} = 4\,\mathrm{Re}\left[\frac{P_1+P_2}{4} + \frac{P_2-P_1}{2}\frac{R^2}{r^2}(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)\right]$$

$$\Rightarrow \sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta} = P_1+P_2 + 2(P_2-P_1)\frac{R^2}{r^2}\cos 2\theta \qquad (11)$$

Αντίστοιχα για την $\Psi(z)$:

$$(10) \overset{(8)}{\Longrightarrow} \sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr}+2i\tau_{r\theta} = \left(\text{αντικατ. } \Phi'(z) = \left(\frac{P_1-P_2}{z^3}R^2\right)\right)$$

$$= 2\left[\bar{z}\,\frac{(P_1-P_2)}{z^3}R^2 - \left(\frac{P_1+P_2}{2}\right) + \left(\frac{2P_3+P_1-P_2}{2}\right)\frac{R^2}{z^2} - \left(\frac{P_1+P_2}{2}\right)\frac{3R^4}{z^4}\right]e^{2i\theta} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{z=re^{i\theta}} \sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr}+2i\tau_{r\theta} =$$

$$= 2\left[re^{-i\theta}\frac{(P_1-P_2)R^2}{r^3e^{i3\theta}} - \left(\frac{P_1+P_2}{2}\right) + \left(\frac{2P_3+P_1-P_2}{2}\right)\frac{R^2}{r^2e^{i2\theta}} - \left(\frac{P_1+P_2}{2}\right)\frac{3R^4}{r^4e^{i4\theta}}\right]e^{2i\theta}$$

$$= \frac{2(P_1-P_2)R^2e^{-i2\theta}}{r^2} - (P_1+P_2)e^{2i\theta} + (2P_3+P_1-P_2)\frac{R^2}{r^2} - \frac{(P_1+P_2)3R^4}{r^4}e^{-i\dots}$$

$$\xRightarrow[e^{2i\theta}=\cos2\theta+i\sin2\theta]{e^{-2i\theta}=\cos2\theta-i\sin2\theta} \sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr}+2i\tau_{r\theta} =$$

$$= \frac{2(P_1-P_2)R^2}{r^2}(\cos2\theta-i\sin2\theta) - (P_1+P_2)(\cos2\theta+i\sin2\theta) + (2P_3+P_1-P_2)\frac{R^2}{r^2}$$

$$- \frac{(P_1+P_2)3R^4}{r^4}(\cos2\theta-i\sin2\theta) \quad (12)$$

Άρα θα έχουμε: (13)

$$\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr} = \left(\frac{2(P_1-P_2)R^2}{r^2} - (P_1+P_2) - \frac{(P_1+P_2)3R^4}{r^4}\right)\cos2\theta + \frac{(2P_3+P_1-P_2)R^2}{r^2}$$

και

$$2\tau_{r\theta} = \left(-\frac{2(P_1-P_2)R^2}{r^2} - (P_1+P_2) + \frac{(P_1+P_2)3R^4}{r^4}\right)\sin2\theta \quad (14)$$

Οι οποίες σχέσεις προέκυψαν από εξίσωση των πραγματικών και φανταστικών μερών των δύο μελών.

► (11) + (13) $\Rightarrow$

$$2\sigma_{\theta\theta} = P_1+P_2 + (2P_3+P_1-P_2)\frac{R^2}{r^2} - \left[(P_1+P_2) + \frac{(P_1+P_2)3R^4}{r^4}\right]\cos2\theta$$

$$\Rightarrow \sigma_{\theta\theta} = \frac{P_1+P_2}{2} + \frac{(2P_3+P_1-P_2)R^2}{2r^2} - \left[(P_1+P_2) + \frac{(P_1+P_2)3R^4}{r^4}\right]\frac{\cos2\theta}{2} \quad (15)$$

Ενώ (11) − (13) $\Rightarrow$

$$2\sigma_{rr} = P_1+P_2 - (2P_3+P_1-P_2)\frac{R^2}{r^2} + \left[-\frac{4(P_1-P_2)R^2}{r^2} + (P_1+P_2) + \frac{(P_1+P_2)3R^4}{r^4}\right]\cos2\theta$$

$$\Rightarrow \sigma_{rr} = \frac{P_1+P_2}{2} - \frac{(2P_3+P_1-P_2)R^2}{2r^2} + \left[-\frac{4(P_1-P_2)R^2}{r^2} + (P_1+P_2) + \frac{(P_1+P_2)3R^4}{r^4}\right]\frac{\cos2\theta}{2}$$

(16)

Οι εξισώσεις (14), (15), (16) αποτελούν τις εξισώσεις του τανυστή των τάσεων σε κάθε σημείο $z(r,\theta)$

- Για να υπολογίσουμε τις μετατοπίσεις, θα πρέπει να υπολογίσουμε τα $\varphi(z)$ και $\psi(z)$ τα οποία αποτελούν τις πυκνότητες των μιγαδικών δυναμικών.

Όμως

$$\varphi(z) = \oint \Phi(z)dz \quad \text{και} \quad \psi(z) = \oint \Psi(z)\,dz$$

Έτσι

$$\oint(7) \Rightarrow \oint\left(\frac{P_1+P_2}{4} + \frac{(P_2-P_1)}{2}\frac{R^2}{z^2}\right)dz = \varphi(z)$$

$$\Rightarrow \varphi(z) = \frac{(P_1+P_2)}{4}z - \frac{(P_2-P_1)}{2}\frac{R^2}{z} \qquad (17)$$

Ομοίως για το $\psi(z)$:

$$\oint(8) = \psi(z) \Rightarrow \oint\left[-\frac{(P_1+P_2)}{2} + \frac{(2P_3+P_1-P_2)}{2}\frac{R^2}{z^2} - \frac{(P_1+P_2)}{2}\frac{3R^4}{z^4}\right]dz$$

$$\Rightarrow \psi(z) = -\frac{(P_1+P_2)}{2}z - \frac{(P_1-P_2+2P_3)}{2}\frac{R^2}{z} + \frac{(P_1+P_2)}{2}\frac{R^4}{z^3} \qquad (18)$$

- Για να υπολογίσουμε τις μετατοπίσεις, θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω τύπους Kolosov-Muskhelishvili

$$u + iv = \frac{1}{2\mu}\left[k\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi'(z)}\right]$$

όπου μ το μέτρο διάτμησης, k η σταθερά Muskhelishvili η οποία για την περίπτωση της επίπεδης έντασης που έχουμε στο πρόβλημα, παίρνει τη μορφή $k = \frac{3-v}{1+v}$ με v ο λόγος Poisson.

$$\Rightarrow 2\mu(u+iv) = k\varphi(z) - z\overline{\varphi'}(z) - \overline{\psi'}(z) \qquad (19)$$

Επίσης έχουμε ότι: $\overline{\varphi'(z)} = \Phi(z) = \frac{P_1+P_2}{4} + \frac{P_2-P_1}{2}\frac{R^2}{z^2}$ (20)

Επί $\overline{\psi(z)} = -\frac{(P_1+P_2)}{2}\bar{z} - \frac{(2P_3+P_1-P_2)}{2}\frac{R^2}{\bar{z}} + \frac{(P_1+P_2)}{2}\frac{R^4}{\bar{z}^3}$ (21)

Οπότε

$$(19) \xrightarrow{(17)(20)(21)} 2\mu(u_r+iu_\theta) =$$

$$= k\left[\frac{(P_1+P_2)}{4}z - \frac{(P_2-P_1)}{2}\frac{R^2}{z}\right] - z\left[\frac{P_1+P_2}{4} + \frac{(P_2-P_1)}{2}\frac{R^2}{\bar{z}^2}\right] +$$

$$+ \frac{(P_1+P_2)}{2}\bar{z} + \frac{(2P_3+P_1-P_2)}{2}\frac{R^2}{\bar{z}} - \frac{(P_1+P_2)}{2}\frac{R^4}{\bar{z}^3}$$

$$\xrightarrow[\bar{z}=re^{-i\theta}]{z=re^{i\theta}} 2\mu(u_r+iu_\theta) =$$

$$= k\frac{(P_1+P_2)}{4}re^{i\theta} - \frac{(P_2-P_1)}{2}\frac{R^2}{r}e^{i\theta} - re^{i\theta}\left[\frac{P_1+P_2}{4} + \frac{(P_2-P_1)}{2}\frac{R^2}{r^2}e^{2i\theta}\right] +$$

$$+\left(\frac{P_1+P_2}{2}\right)re^{-i\theta} + \left(\frac{2P_3+P_1-P_2}{2}\right)\frac{R^2}{r^2}e^{2i\theta} - \left(\frac{P_1+P_2}{2}\right)\frac{R^4}{r^3}e^{3i\theta}$$

$$= \left[k\frac{(P_1+P_2)}{4}r - \frac{(P_2-P_1)}{2}\frac{R^2}{r} - r\left(\frac{P_1+P_2}{4}\right)\right]e^{i\theta} + \left(\frac{P_1+P_2}{2}\right)re^{-i\theta}$$

$$+ \frac{(2P_3+P_1-P_2)}{2}\frac{R^2}{r^2}e^{2i\theta} + \left[\left(\frac{P_1-P_2}{2}\right)\frac{R^2}{r} - \left(\frac{P_1+P_2}{2}\right)\frac{R^4}{r^3}\right]e^{3i\theta}$$

$$\xrightarrow[e^{3i\theta}=\cos3\theta+i\sin3\theta]{e^{2i\theta}=\cos2\theta+i\sin2\theta} 2\mu(u_r+iu_\theta) =$$

$$= \left[k\left(\frac{P_1+P_2}{4}\right)r - \frac{(P_2-P_1)}{2}\frac{R^2}{r} - r\left(\frac{P_1+P_2}{4}\right)\right](\cos\theta+i\sin\theta) +$$

$$+ \left(\frac{P_1+P_2}{2}\right)r(\cos\theta - i\sin\theta) + \left(\frac{2P_3+P_1-P_2}{2}\right)\frac{R^2}{r}(\cos2\theta+i\sin2\theta)$$

$$+\left[\left(\frac{P_1-P_2}{2}\right)\frac{R^2}{r} - \left(\frac{P_1+P_2}{2}\right)\frac{R^4}{r^3}\right](\cos3\theta+i\sin3\theta)$$

Αν εξισώσουμε τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των δύο μελών, θα πάρουμε τις παρακάτω σχέσεις για τις μετατοπίσεις

$$u_r = \left[\left[k\left(\frac{P_1+P_2}{4}\right)r - \left(\frac{P_2-P_1}{2}\right)\frac{R^2}{r} - r\left(\frac{P_1+P_2}{4}\right)\right]\cos\theta + \frac{P_1+P_2}{2}r\cos\theta\right.$$

$$\left. + \left(\frac{2P_3+P_1-P_2}{2}\right)\frac{R^2}{r}\cos 2\theta + \left(\left(\frac{P_1-P_2}{2}\right)\frac{R^2}{r} - \left(\frac{P_1+P_2}{2}\right)\frac{R^4}{r^3}\right)\cos 3\theta\right]\frac{1}{2\mu} \quad (22)$$

Ομοίως

$$u_\theta = \left[\left[k\left(\frac{P_1+P_2}{4}\right)r - \left(\frac{P_2-P_1}{2}\right)\frac{R^2}{r} - r\left(\frac{P_1+P_2}{4}\right)\right]\sin\theta - \frac{P_1+P_2}{2}r\sin\theta\right.$$

$$\left. + \left(\frac{2P_3+P_1-P_2}{2}\right)\frac{R^2}{r}\sin 2\theta + \left(\left(\frac{P_1-P_2}{2}\right)\frac{R^2}{r} - \left(\frac{P_1+P_2}{2}\right)\frac{R^4}{r^3}\right)\sin 3\theta\right]\frac{1}{2\mu} \quad (23)$$

Αν τώρα στις εξισώσεις (22), (23) αντικαταστήσουμε τις τιμές του προβλήματος:

$P_1 = -10P$, $P_2 = 5P$, $P_3 = -2P$

$R = 3\,cm$, $r = 2R = 6\,cm$

$\nu = 0,34$ $\mu = 26GPa$ $k = \frac{3-\nu}{1+\nu} = 1,99$

Θα πάρουμε τις παρακάτω εξισώσεις συναρτήσεις του θ.

$$(22) \Rightarrow u_r = \left[\left[1,99\left(\frac{5-10}{4}\right)6P - \left(\frac{5+10}{2}\right)\frac{3^2}{6}P - 6\left(\frac{5-10}{4}\right) - \frac{5}{2}\cdot 6\right]\cos\theta\right.$$

$$\left. + \left(\frac{2(-2P)+(-10P)-5P}{2}\right)\frac{3^2}{6}\cos 2\theta + \left(\left(\frac{-10-5}{2}\right)\frac{3^2}{6} - \left(\frac{-10+5}{2}\right)\frac{3^4}{6^3}\right)P\cos 3\theta\right]\frac{1}{2\mu}$$

$$= \frac{1}{532}\left[\left[1,99(-1,25)6 - (7,5)\cdot 1,5 + \overset{+15}{7,5}\right]P\cos\theta - 14,5P\cos 2\theta\right.$$

$$\left. + (-9,375)P\cos 3\theta\right] \quad (24)$$

$$= \frac{1}{532}\left[-3,675P\cos\theta - 14,5P\cos 2\theta - 9,375P\cos 3\theta\right] = u_r$$

και

$$(23) \Rightarrow u_\theta = \frac{1}{532}\left[\left[1,99\left[\frac{5-10}{4}\right)6 - \left(\frac{5+10}{2}\right)\frac{3^2}{6} - 6\left(\frac{5-10}{4}\right) + \frac{5\cdot 6}{2}\right]P\sin\theta\right.$$

$$\left. + \left(\frac{2(-2)+(-10)-5}{2}\right)\frac{3^2}{6}P\sin 2\theta + \left[\left(\frac{-15}{2}\right)\frac{3^2}{6} + \frac{5}{2}\frac{3^4}{6^3}\right]P\sin 3\theta\right]$$

$$\Rightarrow u_\theta = \frac{1}{532}\left[-3{,}675\,P\sin\theta - 14{,}25\,P\sin 2\theta - 10{,}312\,P\sin 3\theta\right] \quad (25)$$

► Αντίστοιχα βρίσκουμε και τις εξισώσεις του τανυστή των τάσεων από τις σχέσεις (14), (15), (16)

(14) $\Rightarrow$

$$\tau_{r\theta} = \left[-2\frac{(-10-5)3^2}{6^2} - (-10+5) + (-10+5)\frac{3\cdot 3^4}{6^4}\right]\frac{P\sin 2\theta}{2}$$

$$= \left[\frac{2\cdot 15\cdot 3^2}{6^2} + 5 - \frac{5\cdot 3\cdot 3^4}{6^4}\right]\frac{P\sin 2\theta}{2}$$

$$= \left[\frac{15\cdot 3^2}{6^2} + \frac{5}{2} - \frac{5\cdot 3^5}{6^4\cdot 2}\right]P\sin 2\theta$$

$$\Rightarrow \tau_{r\theta} = 5{,}781\,P\sin 2\theta \quad (26)$$

$$(15) \Rightarrow \sigma_{\theta\theta} = \left(\frac{-10+5}{2}\right)P + \left(\frac{2\cdot(-2)-10-5}{2\cdot 6^2}\right)P3^2 - \left[(-10+5) + \frac{(-10+5)3\cdot 3^4}{6^4}\right]\frac{P\cos 2\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\theta\theta} = -2{,}5P - 2{,}375P + 2{,}968P\cos 2\theta$$

$$\Rightarrow \sigma_{\theta\theta} = -4{,}875P + 2{,}968P\cos 2\theta \quad (27)$$

$$(16) \Rightarrow \sigma_{rr} = \left(\frac{-10+5}{2}\right)P - \left(\frac{2\cdot(-2)-10-5}{2\cdot 6^2}\right)\cdot 3^2P + \left[\frac{-4(-10-5)3^2}{6^2} + (-10+5) + \frac{(-10+5)\cdot 3\cdot 3^4}{6^4}\right]\frac{P\cos 2\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{rr} = -2{,}5P - 2{,}375P + 4{,}531P\cos 2\theta$$

$$\Rightarrow \sigma_{rr} = -4{,}875P + 4{,}531P\cos 2\theta \quad (28)$$

► Έτσι τώρα από τις σχέσεις (24)(25)(26)(27)(28) μπορούμε να δούμε τη συμπεριφορά του τανυστή των τάσεων και του διανύσματος των μετατοπίσεων για διάφορες τιμές της γωνίας θ.

Για $\theta=0$ προκύπτουν οι τιμές

$u_\theta = 0$ cm

$u_r = -0{,}052$ cm

$\sigma_{rr} = -0{,}344$ P

$\sigma_{\theta\theta} = -1{,}907$ P

$\tau_{r\theta} = 0$ P

Για $\theta = \frac{\pi}{6}$

$u_\theta = -0{,}046$ cm

$u_r = -0{,}02$ cm

$\sigma_{rr} = -2{,}609$ P

$\sigma_{\theta\theta} = -3{,}391$ P

$\tau_{r\theta} = 40{,}052$ P

Για $\theta = -\frac{\pi}{6}$

$u_\theta = 0{,}046$ cm

$u_r = -0{,}02$ cm

$\sigma_{rr} = -2{,}609$ P

$\sigma_{\theta\theta} = -3{,}391$ P

$\tau_{r\theta} = -40{,}052$ P

Για $\theta = \frac{\pi}{4}$

$u_\theta = -0{,}045$ cm

$u_r = 0{,}008$ cm

$\sigma_{rr} = -4{,}875$ P

$\sigma_{\theta\theta} = -4{,}875$ P

$\tau_{r\theta} = 46{,}248$ P

Για $\theta = -\frac{\pi}{4}$

$u_\theta = 0{,}045$ cm

$u_r = 0{,}008$ cm

$\sigma_{rr} = -4{,}875$ P

$\sigma_{\theta\theta} = -4{,}875$ P

$\tau_{r\theta} = -46{,}248$ P

Για $\theta = \frac{\pi}{3}$

$u_\theta = -0{,}029$ cm

$u_r = 0{,}028$ cm

$\sigma_{rr} = -7{,}14$ P

$\sigma_{\theta\theta} = -6{,}359$ P

$\tau_{r\theta} = 40{,}052$ P

Για $\theta = \frac{\pi}{3}$

$u_\theta = 0{,}029$ cm

$u_r = 0{,}028$ cm

$\sigma_{rr} = -7{,}14$ P

$\sigma_{\theta\theta} = -6{,}359$ P

$\tau_{r\theta} = -40{,}052$ P

Για $\theta = \frac{\pi}{2}$

$u_\theta = 0{,}012$ cm
$u_r = 0{,}027$ cm
$\sigma_{rr} = -9{,}406$ P
$\sigma_{\theta\theta} = -7{,}843$ P
$\tau_{r\theta} = 0$ P

Για $\theta = -\frac{\pi}{2}$

$u_\theta = -0{,}012$ cm
$u_r = 0{,}027$ cm
$\sigma_{rr} = -9{,}406$ P
$\sigma_{\theta\theta} = -7{,}843$ P
$\tau_{r\theta} = 0$ P