



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ / Κατεύθ. Μαθηματικού Εφαρμογών
ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ «ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ»

ΑΘΗΝΑ 18/06/2010, ΩΡΑ: 12:00

Θέμα 1° :

(α) (Μον. 0.5). Να προσδιορίσετε τον τύπο της διαφορικής εξίσωσης:

$$x_1 u_{x_1 x_1} + 2x_1 u_{x_1 x_2} + u_{x_2 x_2} + u_{x_1} = 5 + u_{x_2}, \quad u = u(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

(β) (Μον. 1.75). Να προσδιοριστεί το A ώστε το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών να είναι επιλύσιμο:

$$\Delta u(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi, \quad 2 < \rho < 3, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi,$$

$$\left. \frac{\partial u(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right|_{\rho=2} = 0, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi, \quad \left. \frac{\partial u(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right|_{\rho=3} = A, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi.$$

Στη συνέχεια να λυθεί.

Θέμα 2° : (Μον. 1.5).

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(x, y, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, y, t), \quad 0 < x < 3, \quad 0 < y < 2, \quad t > 0,$$

$$u(0, y, t) = u(3, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, 2, t) = 0, \quad 0 < x < 3, \quad 0 < y < 2, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, y, 0) = \sin \pi x \sin 4\pi y, \quad 0 < x < 3, \quad 0 < y < 2,$$

$$u_t(x, y, 0) = 0, \quad 0 < x < 3, \quad 0 < y < 2.$$

Θέμα 3° : (Μον. 1.25).

Να δειχθεί ότι η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} 0, & -c < x < 0, \\ c-x, & 0 < x < c, \end{cases}$ είναι:

$$f(x) \sim \frac{c}{4} + \frac{c}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\left(1 - (-1)^n \right) \cos \frac{n\pi x}{c} + n\pi \sin \frac{n\pi x}{c} \right].$$

Στη συνέχεια να δειχθεί ότι ισχύει: $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$

Δίνεται ο τελεστής Laplace σε πολικές συντεταγμένες:

$$\Delta u(\rho, \phi) = \frac{\partial^2 u(\rho, \phi)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u(\rho, \phi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u(\rho, \phi)}{\partial \phi^2}.$$

Θέμα 4° : (2 μον.)

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y''(x) - 2y'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad y(0) = y(L) = 0.$$

(β) Είναι η εξίσωση σε μορφή Sturm-Liouville; Ποια είναι η συνάρτηση βάρους; Να δώσετε τη σχέση ορθογωνιότητας που προκύπτει από αυτό το πρόβλημα.

(γ) Στη συνέχεια να λυθεί, με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλλακτική μέθοδος Fredholm), το ημιομογενές πρόβλημα:

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = g(x) = e^x, \quad 0 < x < L, \quad y(0) = y(L) = 0.$$

(δ) Να αναπτύξετε σε γενικευμένη σειρά Fourier (ως προς τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος), τη συνάρτηση $g(x)$, για $0 < x < L$.

Θέμα 5° : (1,8 μον.)

(α)(μ.1,3). Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την

εξίσωση θερμότητας:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - 1, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 1, \quad u(L,t) = \frac{L^2}{2} + L, & t > 0, \\ u(x,0) = \frac{x^2}{2} + x + 1, & 0 < x < L. \end{cases}$$

Δώστε μία φυσική ερμηνεία αυτού του προβλήματος, αν $u = u(x,t)$ παριστάνει (αδιάστατη) θερμοκρασία.

(β)(μ. 0,5). Να περιγράψετε τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + q(x,t), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < L. \end{cases}$$

Θέμα 6° : (1,2 μον.)

Με χρήση του συνημιτονικού μετασχηματισμού Fourier, να δείξετε ότι η λύση του προβλήματος,

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < \infty, \quad t > 0, \quad u = u(x,t), \\ u_x(0,t) = -1, \quad u(x,t) = 0, & x \rightarrow \infty, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 < x < \infty, \end{cases}$$

είναι η $u = u(x,t) = (t-x)H(t-x)$, (Υποδ. συνδυάστε τη 2 και 4) όπου H η συνάρτηση Heaviside, (υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μετ/σμοί Fourier).

Δίνονται:

$$1. \quad F_c \{u(x,t)\} = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty u(x,t) \cos(sx) dx = \hat{u}(s,t),$$

$$2. \quad F_c^{-1} \{\hat{u}(s,t)\} = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty \hat{u}(s,t) \cos(sx) ds = u(x,t),$$

$$3. \quad F_c \{u_{xx}(x,t)\} = -s^2 \hat{u}(s,t) - \sqrt{2/\pi} u_x(0,t),$$

$$4. \quad F_c \{(1-x)H(1-x)\} = \sqrt{2/\pi} \frac{1}{s^2} (1 - \cos s).$$