



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ / Κατεύθυνση Μαθηματικού Εφαρμογών

ΑΘΗΝΑ 07/9/2009, ΩΡΑ: 12,00

ΘΕΜΑ 1^ο: $(1,2 + 0,5 + 0,8 = 2,5)$

(α) Έχουμε δύο ραδιενεργά στοιχεία X, Y , με σωτηρέση διάσπασης λ, μ αντίστοιχα και το στοιχείο Z μη ραδιενεργό. Αν $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ο αριθμός των ατόμων τη χρονική στιγμή t και με ραδιενεργή σειρά $X \xrightarrow{\lambda} Y \xrightarrow{\mu} Z$. Να κατασκευάσετε ένα μαθηματικό πρόβλημα για την εξέλιξη αυτής της ραδιενεργής αλυσίδας (σειράς). Βρείτε τέμνος το Z .

(β) Να δώσετε δύο συστήματα Lotka-Volterra θηρώτου-θηράματος αν η αύξηση του θηράματος εξαρτάται θηρώτου αυξάνει (i) την ειδική αύξηση (ii) την λογιστική αύξηση.

(γ) Ο νόμος ψύξης (Newton) ενός υγρού είναι ανάλογος της διαφοράς της θερμοκρασίας του υγρού (για κάθε χρονική στιγμή) και της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος. Αν ένα κέιμι που βγαίνει από το φούρνο είναι $300^\circ F$ ενώ 3 λεπτά αργότερα $200^\circ F$, πόσο χρόνο θα χρειαστεί το κέιμι ώστε να ψθάρει τους $70^\circ F$ που είναι η θερμοκρασία του αέρα;

ΘΕΜΑ 2°: (1,2+0,8=2)

(α) Ένα φυσικό φαινόμενο περιγράφεται από τις φυσικές ποσότητες ρ, ℓ, m, t και p που παριστάνουν αντίστοιχα πίεση, μήκος, μάζα, χρόνο, και πυκνότητα. Δείξε την παρακάτω ισοδυναμία των φυσικών νότων:

$$f(\rho, \ell, m, t, p) = 0 \Leftrightarrow G(\pi_1, \pi_2) = 0$$

γε $\pi_1 = \ell^3 / \rho m$, $\pi_2 = t^6 \rho^3 / m^2 p$ αδιάστατες ποσότητες.

(β) Να λύσει με χρήση κανονικών διαταραχών η εξίσωση: $x^3 - \varepsilon x + \theta = 0$

(λύσεις προσεγγιστικά με δύο όρους προσέγγισης).

ΘΕΜΑ 3°: (2)

Με χρήση ιδιόμορφων διαταραχών, βρέξε για ομοιογενή προσεγγιστική λύση (μέχρι 1^{ης} τάξης προσέγγιση) για το πρόβλημα:

$$\varepsilon y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

ΘΕΜΑ 4° (1,5)

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Να βρέξε για επιφάνεια (χρήση λογισμού μεταβολών) σε περιστροφή (περί τον άξονα OX) μιας κοίτης με δεδομένα άκρα έτσι ώστε να έχει το ελάχιστο εμβαδόν.

ΘΕΜΑ 5°: (0,5 + 1,5 = 2)

(α) Να κατασκευάσετε ένα μαθηματικό μοντέλο που να περιγράφει το πρόβλημα του βραχυστοχρόνου ή το πρόβλημα του Πλάτω ή το πρόβλημα διάδοσης ποταμού.

(β) Να λύσει, με τη μέθοδο Poincaré-Lindstedt το πρόβλημα:

$$\left. \begin{aligned} y'' + y &= -\varepsilon y^3, & t > 0, \\ y(0) &= 1, & y'(0) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

(δίνω όρους προσέγγισης).

Διάρκεια Εξέτασης 3 ώρες