

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΔΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
2^ο Εξάμηνο, 19-6-2009**

ΘΕΜΑ 1^ο

Η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ απεικονίζει κάθε σημείο $M(x, y, z)$ του \mathbb{R}^3 στην ορθή προβολή του πάνω στο επίπεδο Π με εξίσωση: $x - 2y + 2z = 0$.

(A) Να αποδείξετε ότι:

- $T(\mathbf{r}) = \mathbf{r} - \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n}^2} \right) \mathbf{n}$, όπου $\mathbf{r} = (x, y, z)$ είναι το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου του \mathbb{R}^3 , $\mathbf{n} = (1, -2, 2)$ και *Mονάδες 1*
- η απεικόνιση T είναι γραμμική. *Mονάδες 0,5*

(B) Να βρείτε τον πίνακα της T ως προς την κανονική βάση του \mathbb{R}^3 και να περιγράψετε γεωμετρικά τον πυρήνα της T

Mονάδες 1

ΘΕΜΑ 2^ο

(a) Άντε $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^n και ο αριθμός $k > 0$, να αποδείξετε ότι $\langle \cdot, \cdot \rangle_1 = k \langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι επίσης εσωτερικό γινόμενο και ότι η γωνία δύο διανυσμάτων x, y παραμένει ή ίδια. *Mονάδες 1*

(β) Στον \mathbb{R}^4 βρείτε διάνυσμα x που είναι κάθετο στα διανύσματα e_1, e_4 και σχηματίζει ίσες γωνίες με τα διανύσματα e_2, e_3 . Τα διανύσματα e_1, e_2, e_3, e_4 είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^4 . *Mονάδες 1*

ΘΕΜΑ 3^ο

Βρείτε ορθογώνιο πίνακα ώστε να διαγωνοποιείται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

και όμοια για τους πίνακες:

$$B = \left(\frac{1}{2} A - I \right)^{100}, \quad \Gamma = e^{At}, \quad \Delta = \sqrt{A}.$$

Mονάδες 2

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (i) Να προσδιορίσετε το ελάχιστο πολυώνυμο του A για τις διάφορες τιμές του
- $\alpha \in \mathbb{R}$
- .

Μονάδες 1

- (ii) Για
- $\alpha = 1$
- , να βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα P ο οποίος διαγωνοποιεί τον πίνακα A.

Μονάδες 1

- (iii) Για
- $\alpha = 2$
- , να βρείτε την κανονική μορφή Jordan του A.

*Μονάδες 0,5***ΘΕΜΑ 5^ο**

Βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες είναι θετικά ορισμένη η τετραγωνική μορφή

$$q = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2kx_2x_3$$

*Μονάδες 1**Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες**Καλή επιτυχία*