Άσκηση 0.0.1

Θα αποδείξουμε το θεώρημα για $m=3$. Για $m>3$ η απόδειξη είναι ανάλογη. Έχουμε

$$g(t) = \Phi(r(t)) = \Phi((x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0), z_0 + t(z_1 - z_0)))$$

άρα

$$g'(t) = \Phi_x(r(t))(x_1 - x_0) + \Phi_y(r(t))(y_1 - y_0) + \Phi_z(r(t))(z_1 - z_0) = \text{grad}(r(t)) \cdot a$$

Επομένως

$$g'(0) = \text{grad}\,\Phi(P_0)\, a$$

Από την υπόθεση ότι $g(t) \geq g(0)$ για κάθε $t \in [0, \delta)$, έχουμε

$$g'(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t} \geq 0$$

άρα ισχύει η (i). Ακριβώς ανάλογα αποδεικνύεται και η (ii) για $\text{grad}\,\Phi(P_0) \cdot a \leq 0$.

Άσκηση 0.0.2

Επειδή η $\geq$ είναι κυρτή, τότε και το $P_{\geq}(x) = \{x' \in \mathbb{R}^n_+ \mid x' \geq x\}$ που αποτελεί το άνω τμήμα της u στο x, είναι κυρτό.

Έτσι για κάθε $x' \in P_{\geq}(x)$ το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία x' και x βρίσκεται στο σύνολο $P_{\geq}(x)$.

Έτσι για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε ότι $r(t) = x + t(x' - x) \in P_{\geq}(x)$ η ισοδύναμα ότι

$$u(r(t)) \geq u(r(0)) \quad \forall\, t \in [0,1]$$

Επομένως η συνάρτηση $g(t) = u(r(t))$, $t \in [0,1]$ παίρνει ελάχιστη τιμή για $t=0$, άρα, από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$$(x' - x) \cdot \text{grad}\,u(x) \geq 0$$

Άρα για κάθε $x' \in P_{\geq}(x)$ έχουμε

$$x' \,\text{grad}\,u(x) \geq x\, \text{grad}\,u(x)$$

Δηλαδή το $\text{grad}\,u(x)$ στηρίζει το σύνολο $P_{\geq}(x)$ στο x.

Άρα το $\text{grad}\,u(x)$ στηρίζει τη σχέση $\geq$ στο σημείο x.

Έτσι έχουμε: $2x + y \leq 10 + 5 = 15$

Άρα η καταναλωτική τιμή στα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3_+ \mid 2x + y = 15\}$

iii) $p = (4,3,5)$, $w = 10$

$B_{p,w} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_+ \mid 4x + 3y + 5z \leq 10\}$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η καταναλωτική τιμή στα σημεία του υποσύμπαγούς περιορισμού

$L: \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_+ \mid 4x + 3y + 5z = 10\}$

<u>Άσκηση 0.0.4</u>

Η καμπύλη αδιαφορίας της z που περνά από το σημείο (x_0, y_0) είναι η ισοσταθμική $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid x^3 y^2 = x_0^3 y_0^2\}$

Επειδή η $y = \sqrt{\frac{x_0^3 y_0^2}{x^3}} = \frac{y_0 \sqrt{x_0^3}}{\sqrt{x^3}}$ είναι κυρτή, η z είναι κυρτή.

Η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Άρα για κάθε εσωτερικό σημείο (x_0, y_0) του $\mathbb{R}^2_+$ το $\text{grad}\, u(x_0,y_0)$ με $\text{grad}\, u(x_0,y_0) = (3x_0^2 y_0^2, 2x_0^3 y_0)$ σημαίνει τη κλίση στο (x_0,y_0)

Άρα για $(x_0,y_0) = (1,1)$ έχουμε ότι το $(3,2)$ σημαίνει τη κλίση στο $(1,1)$

<u>Άσκηση 0.0.5</u>

Έστω $p = (p_1, p_2) \gg 0$. Τότε τα σημεία ζώνης του υποσύμπαγούς περιορισμού $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : p_1 x + p_2 y = 3p_1 + 2p_2\}$ με τους ευθείες $x=0$, $y=0$ είναι τα σημεία

$$\left(0, \frac{3p_1 + 2p_2}{p_2}\right), \left(\frac{3p_1 + 2p_2}{p_1}, 0\right)$$

Παρατηρούμε ότι η ανισοσταθμία ζήτησης είναι η ακόλουθη

$$x(p) = \left(3 + 2\frac{p_2}{p_1}, 0\right), \text{ αν } p_2 > p_1$$

$$x(p) = \left(0, 2 + 3\frac{p_1}{p_2}\right), \text{ αν } p_1 > p_2$$

$$x(p) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+, x + y = 5\} \text{ αν } p_1 = p_2$$

$$y = \frac{2P_1 + 3P_2}{P_2} = \boxed{3 + \frac{2P_1}{P_2} = y}$$

Άρα η συνάρτηση ζήτησης του πρώτου καταναλωτή είναι:

$$\boxed{x_1(p_1, p_2) = \left(2 + 3\frac{P_2}{P_1},\ 3 + 2\frac{P_1}{P_2}\right)}$$

2ος καταναλωτής: Μεγιστοποιούμε τη $u(x,y) = x^2 y$ υπό τους περιορισμούς $P_1 x + P_2 y \leq 5P_1 + 7P_2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

Η $\geq$ μεγιστοποιείται στον υποδηλωτικό περιορισμό δηλαδή

$$P_1 x + P_2 y = 5P_1 + 7P_2 \Rightarrow y = \frac{5P_1 + 7P_2 - P_1 x}{P_2} = A - Bx$$

όπου $A = \frac{5P_1 + 7P_2}{P_2}$ και $B = \frac{P_1}{P_2}$

Άρα $u(x,y) = x^2 y = x^2(A - Bx)$. Θέτω $x = t$. Έτσι το πρόβλημα γίνεται: Μεγιστοποίηση της $g(t) = t^2(A - Bt)$ υπό τους περιορισμούς $t \geq 0$, $A - Bt \geq 0$

Έτσι $g'(t) = 0 \Rightarrow 2t(A - Bt) - t^2 B = 0 \Rightarrow -3Bt^2 + 2At = 0$

$\Rightarrow t(2A - 3Bt) = 0 \Rightarrow t_1 = 0$ ή $t_2 = \frac{2A}{3B}$

$$\bullet\ t = \frac{2A}{3B} = \frac{2}{3}\frac{(5P_1 + 7P_2)}{P_2} \cdot \frac{P_2}{P_1} = \frac{10}{3} + \frac{14}{3}\frac{P_2}{P_1} = x$$

ενώ $y = \frac{5P_1 + 7P_2 - \frac{10}{3}P_1 - \frac{14}{3}P_2}{P_2} = \frac{5}{3}\frac{P_1}{P_2} + 7/3$

Όμως για τις ρίζες της $g'(t)$ έχουμε

		0		$2A/3B$	
$g'(t)$	+	0	−	0	+
$g(t)$	↗		↘		↗

Παρατηρούμε ότι για $t = \frac{2A}{3B}$ η $g(t)$ παίρνει ελάχιστο. Όμως εμείς θέλαμε η g να μεγιστοποιηθεί. Άρα απορρίπτουμε την $t = \frac{2A}{3B}$

Έτσι $t = 0$

που ικανοποιείται από το διάνυσμα P.

Έχουμε $w_1 = (3,1)$, $w_2 = (3,3)$, $X = ((2,2),(4,2))$

$U_1 = X \cdot Y$ $U_2 = X^2 \cdot Y$

Παρατηρούμε ότι $(1,1)\cdot(2,2) = 2+2 = (1,1)\cdot(3,1)$

και $(1,1)(4,2) = 6 = (1,1)\cdot(3,3)$

Άρα τα διανύσματα αξιών $((2,2),(4,2))$ ανήκουν στις αντιστοίχους υποσυμπλεγμάτων περιορισμούς.

Ελέγχουμε αν $U_1(x,y) > U_1(2,2) \Rightarrow (1,1)(x,y) > (1,1)(2,2)$

Ισοδύναμα αν $x \cdot y > 4 \Rightarrow x+y > 4$

Εστω $y = \frac{4}{x}$ θα ελέγχουμε αν

$$x+y > x+\frac{4}{x} = \frac{x^2+4}{x} \geq 13$$

Θέτουμε $f(x) = x^2 - 13x + 4$ και θα ελέγχουμε αν $f(x) \geq 0$

$f'(x) = 2x - 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{13}{2}$

Παρατηρούμε ότι $f(\frac{13}{2}) = (\frac{13}{2})^2 - \frac{13^2}{2} + 4 = -38,25 < 0$

Για $x = \frac{13}{2}$ και $y = \frac{4}{13}\cdot 2 + \varepsilon$ όπου $\varepsilon > 0$ έχουμε ότι

$U_1(x,y) = x \cdot y = \frac{13}{2}(\frac{4}{13}2 + \varepsilon) > 4 = U_1(2,2)$

και $(1,1)\cdot(\frac{13}{2}, \frac{8}{13} + \varepsilon) = \frac{13}{2} + \frac{8}{13} + \varepsilon > 4 = (1,1)(3,1)$

Άρα η x είναι κατάσταση ισορροπίας κατά Walras που ικανοποιεί στο (1,1)

Για το 2ο καταναλωτή ελέγχουμε αν

$U_2(x,y) > U_2(4,2) \Rightarrow (1,1)(x,y) > (1,1)(4,2)$

Ισοδύναμα αν $x^2 y > 32 \Rightarrow x+6 > 6$

Εστω $y = \frac{32}{x^2}$ θα ελέγχουμε αν $x+y > x + \frac{32}{x^2} =$

iii) Εξετάζω αν $u_2(x,y) > u_2(4,2) \Rightarrow (T,T)(x,y) > (T,T)(4,2)$

Ισοδύναμα αν $\min\{x,y\} > 2 \Rightarrow x+y > 6$

Έστω $y = \min\{x,y\}$, θα εξετάσω αν

$x+y > x+2 > 6$

Θέτω $g(x) = x-4$ και θα δείξω αν $f(x) \geq 0$

- $x > 4 \Rightarrow g(x) > 0$

  για $x = x$, $y = 2+\varepsilon$

  $u_2(x,y) = \min(x, 2+\varepsilon) = 2+\varepsilon > 2 = u_2(4,2) = \min\{4,2\}$

  και $(T,T)(x, 2+\varepsilon) = x+2+\varepsilon > 6 = (T,T)(3,3)$

  Άρα είναι Walras

- $2 < x < 4$

  $u_2(x,y) = \min(x, 2+\varepsilon) = 2+\varepsilon > 2 = u_2(4,2) = \min\{4,2\}$

  ενώ $(T,T)(x, 2+\varepsilon) = x+2+\varepsilon < 6 = (T,T)(3,3)$

  Άρα δεν είναι κατανομή ισορροπίας κατά Walras

- $x < 2 \rightarrow g < 0$ Άρα για $2 > x > \min\{x,y\} = y$ έχω

  $u_2(x,y) = \min\{x,y\} = y < 2 = u_2(4,2) = \min\{4,2\}$

  και $(T,T)(x,y) = x+y < 6 = (T,T)(3,3)$

  Άρα δεν είναι κατανομή ισορροπίας κατά Walras.

<u>Άσκηση 0.08</u>

Για $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in P_{\succsim}(x_0)$ και $x_n' \in P_{\succsim}(x_0)$ ώστε

$$\|x_n - y_0\| < \frac{1}{n}, \quad \|x_n' - y_0\| < \frac{1}{n}$$

Τότε $x_n \to y$ και $x_n \succsim x_0$ άρα από τη συνέχεια της σχέσης προτίμησης έχουμε $y_0 \succsim x_0$. Επίσης $x_n' \notin P_{\succsim}(x_0)$ άρα $x_0 \succsim x_n'$ και $x_n' \to y_0$, επομένως από τη συνέχεια της $\succsim$ έπεται ότι $x_0 \succsim y_0$. Άρα $x_0 \sim y_0$