

Τότε βεβαιώνεται ότι $x(t) \leq y(t)$ (1)

$$z = z(t) = \max\{x(t), y(t)\} \stackrel{(1)}{=} \sup\{x(t), y(t)\} = \sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$$

επειδή \in βεβαιωμένα διατεταγμένος χώρος

Αντίστοιχα $w = w(t) = \min\{x(t), y(t)\} = \inf\{x(t), y(t)\} = \inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$

Συντηνός, εφόσον $\forall x, y \in E \exists \sup\{x, y\}$ και $\exists \inf\{x, y\}$, τότε ο χώρος E αποτελεί γραμμικό βιβλίο.

Το στοιχείο $e \in E_+$ είναι διατεταμμένη μονάδα του E αν $\forall x \in E \exists \alpha \in \mathbb{R} \alpha > 0$ π.μ. $x \in [-\alpha e, \alpha e]$.

Εδώ πάλι ότι η δοσμένη ανάρτηση δεν είναι διατεταμμένη μονάδα του E .
 Τότε έχουμε ότι: $\exists y \in E \forall \alpha \in \mathbb{R} \alpha > 0$ π.μ. $y \notin [-\alpha e, \alpha e]$.

Αν όμως αυτό συμβαίνει για κάθε α , τότε δε γίνεται να υπάρξει τέτοιο $y \in E$. Προδίδεται όμως πως τέτοιο y υπάρχει. Άρα άτοπος.

Οπότε η $1(t) = 1 \forall t \in [0, 1]$ είναι διατεταμμένη μονάδα του E .

Άσκηση 0.3

Εφοδίζουμε το δοσμένο χώρο με τη supremum μετρική, με οποια ορίζεται ως εξής: $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$ $\forall f \in E$.

Αυτός ο χώρος είναι πλήρης ως προς τη μετρική που τον ορίζει, οπότε αποτελεί Banach.

Εστω $f \leq g$. (Επειδή ο χώρος είναι διατεταγμένος με τη συγκεκριμένη διάταξη έχω ότι $f(x) \leq g(x) \Rightarrow |f(x)| \leq |g(x)| \Rightarrow \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\} \leq \sup\{|g(x)| : x \in [0, 1]\} \Rightarrow \|f\| \leq \|g\|$.)

Άρα αποδεικνύεται ότι $|f| \leq |g| \Rightarrow \|f\| \leq \|g\|$, οπότε ο χώρος αυτός είναι Banach lattice.

Άσκηση 0.4

$$\sup \{x(0), x(1)\} = 0, \text{ όπου } 0 \in X$$

$$\inf \{x(0), x(1)\} = 0$$

Επειδή $\forall a, b \in X$ $\sup\{a, b\} \in X$ και $\inf\{a, b\} \in X$ τότε $0 \in X$ είναι sublattice του E .

Άσκηση 0.5

$$\sup_X \{x, y\} = z \Leftrightarrow z \in X \text{ και } \forall w \in X \text{ με } w \geq x, y \Rightarrow w \geq z$$

Αυτό ισχύει αν θεωρήσουμε $w = \alpha't + b'$ με $\alpha' > \alpha, b' > b$

$$\text{Αντίστοιχα } \inf_X \{x, y\} = z \Leftrightarrow z \in X \text{ και } \forall w \in X \text{ με } w \leq x, y \Rightarrow w \leq z$$

αν θεωρήσουμε $w = \alpha't + b'$ με $\alpha' < \alpha, b' < b$.

Επομένως, εφόσον υπάρχουν τα $\sup_X \{x, y\}$ και $\inf_X \{x, y\}$ $\forall x, y$ και

$0 \in X$ είναι διατεταγμένο υπόχωρο του E (w , υποσύνολο του E), τότε 0

X είναι lattice subspace του E .

Έστω $c < a, d < b, c, d \in \mathbb{R}$. ~~Θεωρούμε $g(t) = at + b, g \in X$.~~

$$\text{Θεωρούμε } g(t) = ct + d$$

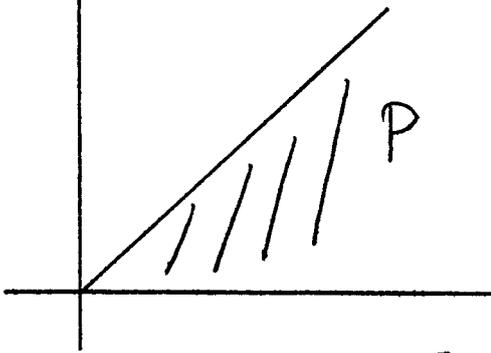
$$\inf \{g(0), g(1)\} = \inf \{d, c+d\} = d$$

Όπως έχουμε για $f(t) = at + b$ ότι $\inf \{f(0), f(1)\} = \inf \{b, a+b\} = b$

~~Διαφορετικά~~ Εφόσον $d < b$ συμπεραίνουμε ότι ~~υπάρχει~~ ~~αριθμός~~ $d \notin X$, οπότε $0 \in X$ δεν είναι sublattice του E , με άλλα λόγια $\inf \{x, y\} \notin X$.

Άσκηση 0.6

i)



$$-P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, 0 \geq y \geq x\}$$

$$\text{Άρα } P \cap (-P) = \{0\}$$

Επομένως, ο P είναι οξεία κώνος.

ii) Η σχέση τριών διατεταγμένων που ορίζεται από τον P ορίζεται ως εξής:
 $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow x - y \in P$ και συμβολίζεται με τα σύνολα σύμβολο της κλιμάκωσης - ιεράρχησης \succcurlyeq

$$\sup\{x, y\} = \sup\{(-2, 1), (1, -1)\} = (1, 1)$$

iii) Βλέπεται ότι υπάρχουν τα $\sup\{x, y\}$, $\inf\{x, y\}$, τα οποία αντιστοιχούν στον P, καθώς αν $x \succcurlyeq y$ $\sup\{x, y\} = x$ και $\inf\{x, y\} = y$.

Συντηνός ο \mathbb{R}^2 διατεταγμένος από τον P είναι γραμμικό σύνολο, καθώς ~~ισχύει~~ ισχύει κλιμάκωση ή αυξανόμενη διατάξη όπως αποδειχθηκε στην άσκηση 0.1 του φυλλαδίου.

Άσκηση 0.7

Έστω $y \in E$. Αν το y είναι άνω φράγμα του A και για κάθε άνω φράγμα $z \in E$ του A ισχύει $z \succcurlyeq y$, το y ονομάζεται ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) του A. Το συμβολίζεται ως $y = \sup(A)$.

~~Σε~~ Για $t = \frac{1}{2}$ έχουμε ότι $\sup A = 0$ και $\sup A = 1$.

Από τον ορισμό του supremum καταδειχτεί πως \emptyset το A δεν έχει supremum, καθώς πρέπει από να λαμβάνει μόνο μία τιμή, κάτι που εδώ δε συμβαίνει.