

Διακρίνα - Στφφ - ΣΗΠ 09

1) α) Δείξτε ότι η συνάρτηση των Euler $\varphi(n)$ ικανοποιεί το ανω φράγμα $\varphi(n) \leq n - \sqrt{n}$ για n σύνθετο φυσικό. 1

β) Δείξτε ότι οι αριθμοί Fibonacci ικανοποιούν την

$$\text{σχίση } F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} - F_n^2 = (-1)^n \text{ για } n \geq 0$$

όπου και τα πρώτα $F_0=0, F_1=F_2=1, F_3=2, F_4=3$ και 1

2) Δείξτε ότι $\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p^2}$ για κάθε πρώτο p 3

3) Έστω ο δευτερός ακέραιος n και $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ τέτοιοι ώστε $\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n + \varepsilon_n \varepsilon_1 = 0$ 3

Δείξτε ότι $n = 4$

4) Πόσοι δευτεροί ακέραιοι που δεν υπερβαίνουν το 120 δεν διαιρούνται με τους 2, 3, 5 (η εξαίρετη περίπτωση δεν μετρά) 2

Διαρκεια 2h 30min - Καλή επιτυχία
Οχι σηκωστος και βιβλίο.