Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Μάθημα: Διαφορική Γεωμετρία καμπύλων και επιφανειών –Εξέταση ΙΟΥΝΙΟΥ 2011

Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ 1°:

Α. Να βρεθεί η περιβάλλουσα $(p): F(x,y)=0$ της οικογένειας των ευθειών (ζ): $x+2\alpha y-2\alpha^3=0$ του επιπέδου, όπου a η παράμετρος της οικογένειας.

Β. Να βρεθεί η εξειλιγμένη $e(t)$ της παραβολής $r(t)=\left(t,\ t^2-\frac{1}{2}\right)$.

Γ. Ποια είναι η σχέση μεταξύ των καμπύλων (p) και $e(t)$ των ερωτημάτων Α και Β και ποια είναι η σχέση μεταξύ των ευθειών της οικογένειας (ζ) και της παραβολής.
Να σχεδιασθούν στο ίδιο σχήμα η παραβολή η περιβάλλουσα (p) και 3 ευθείες της οικογένειας (ζ).

ΘΕΜΑ 2°:

Δίνεται η μοναδιαίας ταχύτητας σφαιρική καμπύλη $r=r(s)$, (δηλαδή $(r(s)-r_0)^2=a^2$, όπου r_0 είναι το (σταθερό) διάνυσμα θέσης του κέντρου και a η (σταθερή) ακτίνα της σφαίρας). Να δειχθεί ότι:

Α. Το κέντρο της σφαίρας ορίζεται από την σχέση: $r_0=r(s)+\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)N(s)-\left(\frac{\kappa'(s)}{\tau(s)\kappa^2(s)}\right)B(s)$, για κάθε σημείο $r(s)$ της καμπύλης, θεωρώντας την καμπυλότητα και την στρέψη, $\kappa(s)$ και $\tau(s)$, μη μηδενικές.

Β. Να βρεθεί η ακτίνα της σφαίρας, συναρτήσει των κ,τ.

Γ. Να δειχθεί ότι το κέντρο καμπυλότητας της καμπύλης σε ένα σημείο της είναι η προβολή του κέντρου της σφαίρας στο εγγύτατο επίπεδο.

ΘΕΜΑ 3°: Δίνεται η καμπύλη $q(t)=(t,\ t)$, $t\in(-1,1)$ και η επιφάνεια της σφαίρας $M: x^2+y^2+z^2=1$ (ή $x(\varphi,\theta)=(\cos\varphi\cos\theta,\ \sin\varphi\cos\theta,\ \sin\theta)$, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$, $0<\varphi<2\pi$).

Α. Να βρεθεί η καμπύλη $a(t)$ της σφαίρας που ορίζει η καμπύλη $q(t)$ και η ταχύτητά της.

Β. Να βρείτε μια βάση στον εφαπτόμενο χώρο T_pM όπου $p=x\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$ και να εκφράσετε την ταχύτητα $a'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ της $a(t)$ στην βάση αυτή.

Γ. Να αποδείξετε ότι η $a(t)$ δεν είναι γεωδαισιακή της σφαίρας.

ΘΕΜΑ 4°.

Α) Να δοθεί ο ορισμός του τελεστή σχήματος μιας επιφάνειας $M=x(D)$ σε ένα σημείο της $p\in M$ και να αποδειχθεί ότι είναι ένας συμμετρικός γραμμικός μετασχηματισμός.

Β) Δίνονται τα ορθοκανονικά διανύσματα $u,v\in T_pM$. Να δειχθεί ότι:

1. Αν $u\cdot Sv=0$ τότε τα $\{u,\ v\}$ είναι κύρια διανύσματα με κύριες καμπυλότητες $k_1=u\cdot Su,\ k_2=v\cdot Sv$.
2. Αν $Su\cdot Sv=0,\ u\cdot Sv\neq 0$, τότε η μέση καμπυλότητα H είναι μηδέν.
3. Αν $Su\times Sv=0$, τότε η καμπυλότητα Gauss K είναι μηδέν.

Διάρκεια εξέτασης: 2:30 ώρες