

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΚΥΡΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ 15/3/2008

**Θέμα 1.** (1.1) Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  χυρτή συνάρτηση. Είναι η  $f$  συνεχής; Τι γνωρίζετε για την παραγωγισμότητα χυρτών συναρτήσων από το  $\mathbb{R}$  στο  $\mathbb{R}$ ;

(1.2) Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  χυρτή συνάρτηση. Αν η  $f$  λαμβάνει μέγιστη τιμή σε κάποιο  $x_0 \in \mathbb{R}$  δείξτε ότι η  $f$  είναι σταθερή.

(1.3) Έστω  $K$  χυρτό κλειστό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ . Δώστε τον ορισμό της απεικόνισης του πλησιέστερου σημείου  $p_K$  και διατυπώστε τις κύριες ιδιότητές της. Δείξτε ότι για κάθε συνοριακό σημείο  $x_0$  του  $K$  υπάρχει υπερεπίπεδο στήριξης  $H$  του  $K$  που διέρχεται από το  $x_0$ .

**Θέμα 2.** (2.1) Διατυπώστε τον ορισμό της χυρτής θήκης ενός υποσυνόλου  $A$  του  $\mathbb{R}^N$  και δώστε τους τρόπους περιγραφής της.

(2.2) (i) Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_k$  σημεία του  $\mathbb{R}^n$  όπου  $k \geq n + 2$ . Δείξτε ότι υπάρχει διαμέριση του  $\{1, \dots, k\}$  σε δύο μη κενά και ξένα υποσύνολά του  $I, J$  ώστε

$$\text{conv}\{x_i : i \in I\} \cap \text{conv}\{x_j : j \in J\} \neq \emptyset.$$

(2.3) Έστω  $\mathcal{F}$  πεπερασμένη οικογένεια από χυρτά υποσύνολα του  $\mathbb{R}^n$  που περιέχει τουλάχιστον  $n + 1$  μέλη. Έστω  $K$  χυρτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  τέτοιο ώστε για κάθε υποοικογένεια  $\mathcal{G}$  της  $\mathcal{F}$  με  $n + 1$  μέλη υπάρχει μεταφορά του  $K$  που περιέχει όλα τα μέλη της  $\mathcal{G}$ . Δείξτε ότι υπάρχει μεταφορά του  $K$  που περιέχει όλα τα μέλη της  $\mathcal{F}$ .

(2.4) Έστω  $K$  χυρτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^N$ . (i) Δείξτε ότι το εσωτερικό του  $K$ ,  $\text{Int}K$ , και η κλειστότητα του  $K$ ,  $\overline{K}$  είναι χυρτά. (ii) Υποθέτουμε ότι  $0 \in \text{Int}K$ . Δείξτε ότι  $x \in \text{Int}K$  αν και μόνο αν υπάρχει  $\lambda > 1$  ώστε  $\lambda x \in K$ .

**Θέμα 3.** Έστω  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  χυρτό .

(3.1) (i) Δώστε τους ορισμούς του ακραίου υποσυνόλου και του ακραίου σημείου του  $K$ . Με την βοήθεια σχήματος βρείτε τα ακραία σημεία και τα ακραία υποσύνολα του συνόλου  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ . (ii) Αν το  $K$  είναι συμπαγές, δείξτε (πλήρως) ότι το σύνολο των ακραίων σημείων του  $K$ ,  $\text{Ext}K$ , είναι μη κενό. (iii) Αν  $F$  ακραίο υποσύνολο του  $K$  δείξτε ότι  $\text{Ext}F \subseteq \text{Ext}K$ . (iv) Δείξτε ότι αν το  $F$  είναι συμπαγές τότε υπάρχει  $E \subseteq \text{Ext}K$  ώστε  $F = \text{conv}E$ .

(3.2) Ένα υποσύνολο  $F$  του  $K$  καλείται εκτεθειμένο αν υπάρχει υπερεπίπεδο στήριξης  $H$  του  $K$  ώστε  $F = H \cap K$ , ή ισοδύναμα υπάρχουν  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  γραμμική συνάρτηση και  $c \in \mathbb{R}$  ώστε (i) αν  $x \in F$  τότε  $f(x) = c$  και (ii) αν  $x \in K \setminus F$  τότε  $f(x) < c$ . Δείξτε τα εξής: (i) Κάθε εκτεθειμένο υποσύνολο του  $K$  είναι και ακραίο υποσύνολο του  $K$ . (ii) Αν  $\{F_1, \dots, F_m\}$  είναι μια οικογένεια από εκτεθειμένα υποσύνολα του  $K$  τότε και η τομή  $F = \bigcap_{i=1}^m F_i$  είναι εκτεθειμένο υποσύνολο του  $K$ .

(3.3) Έστω  $m \geq 2$  και  $x_1, \dots, x_m$  σημεία του  $\mathbb{R}^n$ . Θέτουμε  $K = \text{conv}\{x_1, \dots, x_m\}$ . Εξηγείστε γιατί το  $K$  είναι συμπαγές και δείξτε ότι αν το  $x_1 \notin \text{conv}\{x_2, \dots, x_m\}$  τότε το  $x_1$  είναι εκτεθειμένο σημείο του  $K$ .