

**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ II & ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ**

Διδάσκων: Γ. Παπαγεωργίου

Φεβρουάριος 2008

**Θέμα 1:** (1, 1.5, 1) = 3.5 μονάδες

α) Δίνεται η διαφορική εξίσωση 3ης τάξης της μορφής:

$$y''' = -2y'' - 2y' - 4y.$$

Να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο σύστημα διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης. Εν συνεχεία το σύστημα που θα προκύψει, να μελετηθεί ως προς την **ευστάθεια**.

β) Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής:  $y' = f(x, y) = -2y^2/3$ ,  $y(0)=1$ , για το οποίο ζητάμε την προσέγγιση  $y_1$  στο σημείο  $x_1=0.2$ , εφαρμόζοντας την έμμεση μέθοδο τραπεζίου με τύπο  $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$ , και βήμα  $h = 0.2$ .

i) Να υπολογίσετε την μη γραμμική αλγεβρική εξίσωση για την προσέγγιση της  $y_1$ , και εν συνεχεία τον επαναληπτικό τύπο της μεθόδου *Newton*, ( $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ ), για την επίλυση αυτής.

ii) Να υπολογίσετε μία αρχική προσέγγιση  $y_1^{(0)}$ , χρησιμοποιώντας ένα βήμα της άμεσης μεθόδου *Euler*, ( $h = 0.2$ ), και εν συνεχεία υπολογίστε μία βελτιωμένη αριθμητική τιμή για την  $y_1$ , εφαρμόζοντας δύο φορές την μέθοδο *Newton*.

γ) Θεωρούμε την έμμεση μέθοδο *Euler*,  $y_{n+1} = y_n + h\{f(x_{n+1}, y_{n+1})\}$ , για την προσέγγιση της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών της μορφής:  $y' = f(x, y)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $y(a) = y_0$ . Να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια και την τάξη ακρίβειας. (Δηλαδή να υπολογιστεί το διάστημα ευστάθειας και η τάξη της μεθόδου).

**Θέμα 2:** (0.5, 1, 1) = 2.5 μονάδες

α) Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής:

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = y_0 \tag{1}$$

και την μέθοδο  $k$ -βημάτων της μορφής:  $\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}$  (2)

- Να ορίσετε το  $1^\circ$  και  $2^\circ$  **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** που αντιστοιχεί στην (2).
- Αναφέρατε τα κριτήρια που πρέπει να ισχύουν ώστε η (2) να είναι **μηδενικά-ευσταθής** και **συνεπής** αντίστοιχα.

β) Δίνεται η πολυβηματική μέθοδος 3ης τάξης της μορφής:

$$y_{n+3} + 3(3a+1)y_{n+2} - (9a+4)y_{n+1} = h[(5a+6)f_{n+2} + (3a-1)f_{n+1} + af_n].$$

Να εξεταστεί για ποιες τιμές της παραμέτρου  $a$  η μέθοδος είναι **συνεπής**.

γ) Δίνεται η μέθοδος:

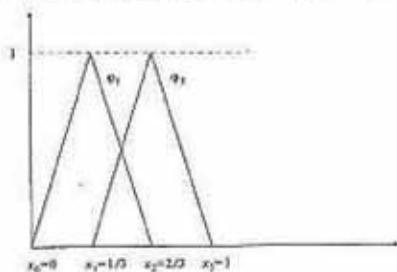
$$y_{n+2} - (1+a)y_{n+1} + ay_n = \frac{h}{2}\{f_{n+2} + (1-a)f_{n+1} - af_n\}.$$

Να υπολογιστεί η παράμετρος  $a$ , ώστε η μέθοδος να είναι **συγκλίνουσα**.

**Θέμα 3: (1, 2) = 3 μονάδες**

Δίνεται το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:  $-u'' + 2u = x$ ,  $x \in (0, 1)$ ,  $u(0) = u(1) = 0$ .

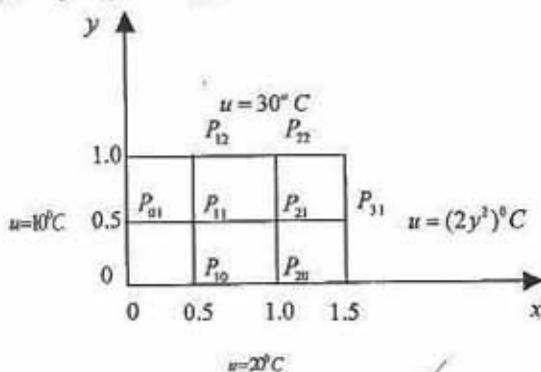
α) Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις στέγες (τιμηματικά πολυώνυμα 1<sup>ου</sup> βαθμού)  $\varphi_1(x)$  και  $\varphi_2(x)$ , σύμφωνα με το σχήμα όπου το βήμα της διαμέρισης είναι  $h=1/3$ .



β) Να εφαρμοστεί η μέθοδος *Galerkin* για την προσέγγιση της λύσης του δοθέντος προβλήματος με συναρτήσεις βάσης τις  $\varphi_1(x)$  και  $\varphi_2(x)$ , και να υπολογιστούν τα στοιχεία του πίνακα **A** και του διανύσματος **b**, του γραμμικού συστήματος  $\mathbf{A} \mathbf{e} = \mathbf{b}$  που προκύπτει.

**Θέμα 4: (1 μονάδα)**

Μία ορθογώνια μεταλλική πλάκα μεγέθους  $1.5m \times 1.0m$ , διαμερίζεται με ένα τετραγωνικό πλέγμα όπου  $h = k = 0.5$ . Η θερμοκρασία κατά μήκος των ακμών είναι  $10^\circ C$ ,  $20^\circ C$ ,  $(2y^2)^\circ C$ , και  $30^\circ C$ , όπως δείχνει το σχήμα.



Η κατανομή της θερμοκρασίας στην πλάκα περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση Poisson στις δύο διαστάσεις και είναι της μορφής

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x^2 y$$

Να υπολογιστεί η θερμοκρασία στα εσωτερικά σημεία της διαμέρισης εφαρμόζοντας την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

(Χρήσιμοι τύποι:  $\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$ ).

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ⓞ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3.00 ΩΡΕΣ Ⓞ