

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ & ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

Διδάσκων: Γ. Παπαγεωργίου

Φεβρουάριος 2006

Θέμα 1: (1, 1) = 2 μονάδες

α) Δίνεται η μέθοδος *Runge-Kutta* (RK) της μορφής:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + h/2, y_n + hk_1/2)$$

$$k_3 = f(x_n + h/2, y_n + hk_2/2)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

Να υπολογίσετε το *πολύωνυμο ευστάθειας* της μεθόδου, εφαρμόζοντας την μέθοδο στην διαφορική εξίσωση μοντέλο, $y' = \lambda y$, $y(0) = y_0$ ($\neq 0$), όπου λ ένας πραγματικός και αρνητικός αριθμός. Ποια συνθήκη πρέπει να ισχύει ώστε η μέθοδος να είναι *απόλυτα ευσταθής*.

β) Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών για διαφορική εξίσωση 2ης τάξης της μορφής:

$$y'' - 10y' - 11y = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = -1$$

Να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο πρόβλημα αρχικών τιμών 1ης τάξης. Εν συνεχεία, το σύστημα που θα προκύψει, να μελετηθεί ως προς την *ευστάθεια*.

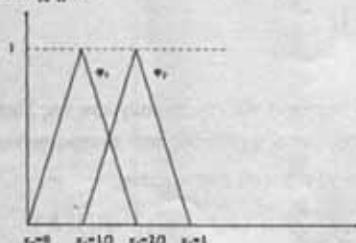
Θέμα 2: (1+1)=2 μονάδες

Δίνεται το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:

$$-u'' + 2u = x, \quad x \in (0, 1),$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

- Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις *στέγες* (τμηματικά πολυώνυμα 1^{ου} βαθμού) $\varphi_1(x)$ και $\varphi_2(x)$, σύμφωνα με το σχήμα.



- Να υπολογιστεί η ασθενής μορφή του προβλήματος εφαρμόζοντας την μέθοδο *Galerkin* με συναρτήσεις βάσης τις $\varphi_1(x)$ και $\varphi_2(x)$ και το αντίστοιχο προσεγγιστικό πρόβλημα συμβολικά (χωρίς να εκτελεστούν οι πράξεις αναλυτικά).

Θέμα 3: 2 μονάδες

Θεωρούμε το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:

$$u'' = u' + 2x, \quad 0 < x < 1$$
$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

και τα σημεία της διαμέρισης $x_1 = 0, x_2 = 0.4, x_3 = 0.8, x_4 = 1$. Να εφαρμόσετε την μέθοδο της ταξινόμησης για την προσέγγιση της λύσης χρησιμοποιώντας σαν συναρτήσεις βάσης τα μονώνυμα $1, x, x^2, x^3$ και να υπολογίσετε το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα.

Θέμα 4: (1.2+1.3)=2.5 μονάδες)

α) Θεωρούμε την μέθοδο k -βημάτων της μορφής:
$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j} \quad (1)$$

Να ορίσετε το 1^ο και 2^ο χαρακτηριστικό πολυώνυμο που αντιστοιχεί στην (1). Αναφέρατε τα κριτήρια που πρέπει να ισχύουν ώστε η (1) να είναι μηδενικά ευσταθής και συνεπής αντίστοιχα.

Δίνεται η μονοπαραμετρική οικογένεια μεθόδων της μορφής:

$$y_{n+2} - (1+a)y_{n+1} + a y_n = \frac{h}{12} \{ (5+a)f_{n+2} + 8(1-a)f_{n+1} - (1+5a)f_n \}$$

Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές του a για τις οποίες η αντίστοιχη μέθοδος συγκλίνει.

β) Το σφάλμα αποκοπής της γραμμικής μεθόδου k -βημάτων (1) μπορεί να γραφεί:

$$T_n = \frac{1}{h \sigma(1)} \{ C_0 y(x_n) + C_1 h y'(x_n) + \dots + C_p h^p y^{(p)}(x_n) + \dots \}$$

όπου,

$$C_0 = \sum_{j=0}^k \alpha_j, \quad C_1 = \sum_{j=1}^k j \alpha_j - \sum_{j=0}^k \beta_j, \quad \dots, \quad C_p = \sum_{j=1}^k \frac{j^p}{p!} \alpha_j - \sum_{j=1}^k \frac{j^{p-1}}{(p-1)!} \beta_j.$$

Να διατυπωθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η μέθοδος να είναι τάξης p , και να δειχθεί ότι η παραμετρική μέθοδος:

$$y_{n+2} + (b-1)y_{n+1} - b y_n = h/4 \{ (b+3)f_{n+2} + (3b+1)f_n \}$$

είναι τάξης 2 αν $b \neq -1$.

Θέμα 5: (1.5 μονάδες)

Δίνεται το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:

$$u'' - 3x^2 u' = 5x, \quad x \in (0, 4), \quad h=1,$$
$$u_0 = u(0) = 1, \quad u_4 = u(4) = 0$$

Να υπολογιστεί (χωρίς να λυθεί) το γραμμικό σύστημα για την προσέγγιση της λύσης στα σημεία που ορίζονται από την διαμέριση $x_i = i h$, αν εφαρμοστεί η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών. Αναφέρατε μερικές από τις μεθόδους επίλυσης του γραμμικού συστήματος.

(Χρήσιμοι τύποι: $u''(x_i) \approx (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})/h^2$, $u'(x_i) \approx (u_{i+1} - u_i)/h$).

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ⓛ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3.00 ΩΡΕΣ Ⓛ