

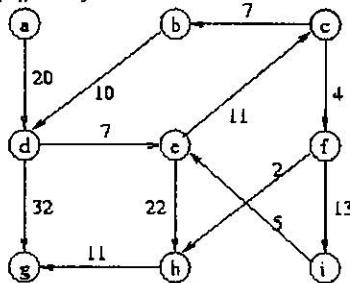
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

31 Μαΐου 2007

- Να απαντηθούν ΟΛΑ (S) τα θέματα.
- Καλή επιτυχία.

Θέμα 1:

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Dijkstra, να υπολογιστεί το βάρος των ελαχίστων μονοπατιών από τον κόμβο b προς όλους τους άλλους κόμβους του γραφήματος:



Να παρουσιάσετε την δουλειά σας λεπτομερειακά.

Θέμα 2:

Να υπολογιστεί ο βέλτιστος κώδικας Huffman που αντιστοιχεί στο παρακάτω σύνολο συχνοτήτων:

a:1, b:2, c:4, d:7, e:12, f:20, g:33, h:54, i:88

Να παρουσιάσετε την δουλειά σας λεπτομερειακά.

Θέμα 3:

Θέλουμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο (δηλ. μικρότερου βάρους) μονοπάτι από την αφετηρία s προς κάθε άλλο κόμβο ενός κατευθυνόμενου γραφήματος το οποίο περιέχει αρνητικά βάρη αλλά όχι αρνητικούς κύκλους. Χρησιμοποιούμε τη παρακάτω μέθοδο:

- ο Έστω w το μικρότερο (αρνητικό) βάρος στο γράφημα. Τροποποιήστε όλα τα βάρη προσθέτοντας στο καθένα από αυτά το w+1. Με την αλλαγή αυτή (i) το βάρος όλων των ακμών μεταβάλλεται ομοιόμορφα και (ii) το βάρος της μικρότερης ακμής γίνεται ίσο με την μονάδα (δηλαδή, θετικό).
- ο Λύσε το πρόβλημα των «ελαχίστων μονοπατιών από κοινή αφετηρία» για το τροποποιημένο γράφημα.

Ισχυρίζομαστε ότι η μέθοδος αυτή σωστά υπολογίζει τα ελάχιστα μονοπάτια. Είναι ο ισχυρισμός μας σωστός; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

Θέμα 4:

Ένας κόμβος u ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G=(V, E) ονομάζεται καθολικός τερματικός κόμβος εάν ισχύει ότι $\text{inDegree}(u)=|V|-1$ και $\text{outDegree}(u)=0$. Το γράφημα G δίνεται σε μορφή πίνακα γειτνίασης και υποθέτουμε ότι βρίσκεται ήδη στην μνήμη του υπολογιστή.

- Να σχεδιαστεί αλγόριθμος ο οποίος υπολογίζει σε $O(V^2)$ χρόνο εάν το γράφημα G περιέχει έναν καθολικό τερματικό κόμβο, και εάν ναι το ποιος είναι ο κόμβος αυτός. Να αιτιολογηθεί η χρονική πολυπλοκότητα του αλγόριθμου σας.
- Να σχεδιαστεί αλγόριθμος ο οποίος επιλύει το ίδιο πρόβλημα σε $O(V)$ χρόνο. Να αιτιολογηθεί η χρονική πολυπλοκότητα του αλγόριθμου σας.

Θέμα 5:

Δίνονται τα παρακάτω προβλήματα:

CLIQUE

Δεδομένα: Ένα γράφημα G=(V,E) και ένας θετικός ακέραιος $c \leq |V|$.

Ερώτηση: Περιέχει το γράφημα G κλίκα μεγέθους c; Δηλαδή, υπάρχει $V' \subseteq V$ τέτοιο ώστε $|V'|=c$ και $\forall u, v \in V'$ ισχύει ότι $(u,v) \in E$;

INDEPENDENT SET (Σύνολο ανεξάρτητων κόμβων)

Δεδομένα: Ένα γράφημα G=(V,E) και ένας θετικός ακέραιος $i \leq |V|$.

Ερώτηση: Περιέχει το γράφημα G σύνολο ανεξάρτητων κόμβων μεγέθους i; Δηλαδή, υπάρχει $V' \subseteq V$ τέτοιο ώστε $|V'|=i$ και $\forall u, v \in V'$ ισχύει ότι $(u,v) \notin E$;

Με δεδομένο ότι το πρόβλημα CLIQUE είναι NP-complete, να δειχθεί ότι το πρόβλημα INDEPENDENT SET είναι επίσης NP-complete.