



Η. Κατσούφης Α-1  
 Θ. Παπαδοπούλου Μ-2

5/7/06

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Σύνολο 4

Άσκηση 22

Για ένα σωματίδιο με μάζα  $1g$  και ταχύτητα  $200m/s$ , κλεισμένο μέσα σε ένα κιβώτιο πλευράς  $10cm$ , να υπολογιστεί ο κβαντικός αριθμός  $n$ . Αν η ταχύτητα αυτή είναι γνωστή με <sup>(σχετική)</sup> ακρίβεια  $10^{-6}$ , ποιά είναι η αντίστοιχη αβεβαιότητα του  $n$ ; Έχει τότε νόημα να μιλάμε για κβάντωση;

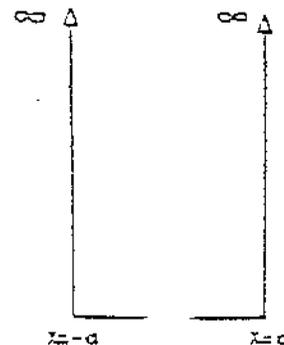
Άσκηση 23

Δείξτε ότι για ένα σωματίδιο μέσα σε μονοδιάστατο φέρον δυναμικού  $d$ -πειρου ύψους και πλάτους  $2a$ , η μέση τιμή του τετραγώνου της συντεταγμένης θέσεως είναι

$$\overline{x^2} = \frac{a^2}{3} \left( 1 - \frac{6}{n^2 \pi^2} \right)$$

όπου  $n$  ο κβαντικός αριθμός της ενέργειας. Δείξτε ότι αν  $n \gg 1$ , τότε το  $\overline{x^2}$  τείνει στη κλασικά άναμενόμενη τιμή.

(Άρα η της Αντιστοιχίας)



Άσκηση 24

Σωματίδιο που προσπίπτει στο σκαλοπάτι δυναμικού  $U(x)=V_0$  για  $x>0$  και  $U(x)=0$  για  $x<0$ , με ενέργεια  $E < V_0$ , περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} [(1+i)e^{kx} + (1-i)e^{-kx}] & \text{για } x \leq 0 \\ e^{-kx} & \text{για } x \geq 0 \end{cases}$$

Επαληθεύστε ότι ο συντελεστής ανάκλασης είναι ίσος με τη μονάδα.

### Άσκηση 25

Δείξτε ότι, αν μία κυματοσυνάρτηση γραφεί με τη μορφή:  $\psi = \sum_i c_i \phi_i$ , όπου  $\phi_i$  οι ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις ενός τελεστού  $Q$  και  $q_i$  οι αντίστοιχες ιδιοτιμές του, τότε η αναμενόμενη τιμή του μεγέθους  $Q$  δίνεται από το:

$$\langle Q \rangle = \frac{\sum_i q_i |c_i|^2}{\sum_i |c_i|^2}$$

Εξ' άλλου δείξτε ότι, για να είναι κανονικοποιημένη η  $\psi$ , θα πρέπει:  $\sum_i |c_i|^2 = 1$

### Άσκηση 26

Αρμονικός ταλαντωτής σταθεράς  $k$  και μάζας  $m$ , βρίσκεται στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση με κυματοσυνάρτηση  $\psi = C x e^{-ax^2/2}$ , όπου  $a = \frac{m\omega}{\hbar}$  και  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ .

- Να προσδιοριστούν οι θέσεις στις οποίες η πυκνότητα πιθανότητας εύρεσης του σωματιδίου παρουσιάζει μέγιστο
- Να βρεθεί η τιμή της πυκνότητας πιθανότητας στις θέσεις στις οποίες αυτή παρουσιάζει μέγιστο
- Να υπολογιστεί η πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο στην περιοχή  $0 < x < +\infty$ ;
- Να υπολογιστεί η μέση τιμή της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας.

### Άσκηση 27

Θεωρήστε τους τελεστές  $A = (\frac{\partial}{\partial x} + x)$  και  $B = (\frac{\partial}{\partial x} - x)$ . Δείξτε ότι

$$AB = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2 - 1 \quad \text{και} \quad BA = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2 + 1$$

Αν  $[A, B]$  είναι ο μεταθέτης των τελεστών  $A$  και  $B$ , δηλαδή  $[A, B] \equiv AB - BA$ , δείξτε ότι

- $[A, B] = -[B, A]$
- $[A, B+C] = [A, B] + [A, C]$
- $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$
- $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$  [Ταυτότητα Jacobi]

### Άσκηση 28

Ένα σύστημα περιγράφεται από τη συνάρτηση  $u(x)$ . Θεωρήστε το φυσικό μέγεθος στο οποίο αντιστοιχεί ο Ερμιτιανός τελεστής  $A$  με εξίσωση ιδιοτιμών

$$A\phi_i = a_i \phi_i \quad i=1,2$$

Αν κάνουμε μέτρηση αυτού του φυσικού μεγέθους, ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε την ιδιοτιμή  $a_1$ , ως αποτέλεσμα της μέτρησης; Σε ποια κατάσταση θα παραμείνει το σύστημα μετά τη μέτρηση;

### Άσκηση 29

Υπολογίστε τους μεταθέτες

- $[H, x]$
- $[H, p_x]$

$$\text{όπου} \quad H = \frac{p^2}{2m} + V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

### Άσκηση 30

Δείξτε ότι αν  $\bar{p}$  και  $\hat{H}$  είναι οι τελεστές της ορμής και της ολικής ενέργειας, δείξτε ότι

$$(α) \quad \bar{p} = \frac{im}{\hbar} [\hat{H}, \vec{r}]$$

(β) Αν ένα σωματίδιο βρίσκεται σε κατάσταση η οποία περιγράφεται από ιδιοσυνάρτηση του τελεστή  $\hat{H}$  τότε η αναμενόμενη τιμή της ορμής  $\langle \bar{p} \rangle$  στην κατάσταση αυτή είναι ίση με μηδέν, δηλαδή ότι αν  $\hat{H}\Psi_n = E_n\Psi_n$ , τότε  $\langle \bar{p} \rangle_n = 0$

### Άσκηση 31

Δείξτε ότι  $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$  όπου σύμφωνα με τον ορισμό της στροφορμής

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

έχουμε τους (ερμιτιανούς) τελεστές των συνιστωσών αυτής  $L_x, L_y$  και  $L_z$  ως εξής:

$$L_x = y p_z - z p_y, \quad L_y = z p_x - x p_z, \quad L_z = x p_y - y p_x$$

όπου όλοι οι παράγοντες  $x, y, z, p_x, p_y, p_z$  είναι τελεστές.

### Άσκηση 32

Βρείτε την ελάχιστη μάζα που πρέπει να έχει ένα σωματίδιο ώστε να υπάρχει δέσμη κατάστασης, όταν αυτό κινείται εντός του δυναμικού:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{για } x \leq 0 \\ -V_0 & \text{για } 0 < x < a \\ 0 & \text{για } x \geq a \end{cases}$$

### Άσκηση 33

Υπολογίστε την ενέργεια της δέσμιας κατάστασης σωματιδίου κινουμένου στο μονοδιάστατο χώρο με δυναμική ενέργεια

$$V(x) = -\lambda \delta(x)$$

με  $\lambda > 0$ .

### Άσκηση 34

Να μελετηθεί η κίνηση σωματιδίου μέσα σε ορθογώνιο κουτί διαστάσεων  $a \times b \times c$ . Για την περίπτωση κόβου πλευράς  $a$  υπολογίστε τη ενέργεια των 10 χαμηλοτέρων ενεργειακών σταθμών.

### Άσκηση 35

θεωρούμε άτομο υδρογόνου στη θεμελιώδη του κατάσταση.

α) Βρείτε σε πόση απόσταση από τον πυρήνα ( $r_{\text{M}}$ ) η ακτινική κατανομή πυκνότητας πιθανότητας γίνεται μέγιστη.

β) Βρείτε τη μέση τιμή,  $\bar{r}$ , της ποσότητας  $r = |\vec{r}|$ .

γ) Πώς εξηγείτε τη διαφορά των παραπάνω αποτελεσμάτων;

Σωματίδιο κινείται στο εσωτερικό πηγαδιού δυναμικού απείρου βάθους και περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

### Άσκηση 36

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{για } 0 \leq x \leq L$$

$$\psi_1(x) = 0 \quad \text{για } x < 0 \text{ και } x > L$$

Ας υποθέσουμε ότι το σωματίδιο βρίσκεται στη βασική του κατάσταση.

α) Προσδιορίστε την πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο στο διάστημα μεταξύ  $x=0$  και  $x = \frac{L}{3}$

β) Χωρίς κανέναν υπολογισμό ολοκληρώματος, αλλά με επιχειρήματα συμμετρίας, πείτε ποια είναι η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο στο διάστημα μεταξύ  $x = \frac{L}{3}$  και  $x = \frac{2L}{3}$ .

Υποθέτουμε ότι το σωματίδιο βρίσκεται στη βασική κατάσταση με ενέργεια  $2eV$ , αποκτά την κατάλληλη ενέργεια και μεταβαίνει στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση.

γ) Πόση ενέργεια πρέπει να έχει ένα φωτόνιο που θα απορροφήσει το σωματίδιο ώστε αυτό να μπορέσει να μεταβεί στη νέα του κατάσταση; Ποιο είναι το μήκος κύματος του φωτονίου;

δ) Βρείτε την αναμενόμενη τιμή της θέσης  $x$  του σωματιδίου.

ε) Πού είναι πιθανότερο να βρεθεί το σωματίδιο: γύρω από τη θέση  $x = \frac{L}{2}$

δηλαδή μεταξύ  $x = 0.49L$  και  $x = 0.51L$  ή γύρω από τη θέση  $x = \frac{L}{4}$

δηλαδή μεταξύ  $x = 0.24L$  και  $x = 0.26L$ .

στ) Ποιες είναι οι πλέον πιθανές θέσεις γύρω από τις οποίες μπορεί να βρεθεί το σωματίδιο;

ζ) Γιατί λέμε «γύρω» από τις θέσεις και δεν λέμε στις θέσεις, στο προηγούμενο ερώτημα στ);

### Άσκηση 37

α) Κανονικοποιήστε τις συναρτήσεις  $\psi_1(x) = A e^{-ax^2}$  και  $\psi_2(x) = B x e^{-ax^2}$  στο διάστημα  $-\infty < x < +\infty$ .

Δείξτε ότι οι δύο συναρτήσεις στο διάστημα αυτό είναι ορθογώνιες.

β) Είναι οι συναρτήσεις αυτές ορθογώνιες στο διάστημα  $0 \leq x < \infty$ ; Σχολιάστε.

Η μορφή του κυματοπακέτου ενός ελεύθερου σωματιδίου με μάζα  $m$ , που δι-  
αδίδεται κατά τη διεύθυνση  $x$ , δίνεται από την κυματική συνάρτηση

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

δηλαδή το κυματοπακέτο είναι υπέρθεση επίπεδων κυμάτων της μορφής  $e^{i(kx - \omega t)}$ .  
Αν η  $\psi(x, t)$  ικανοποιεί την εξίσωση Schrödinger για τυχόντα  $a(k)$  να βρεθεί  
ή σχέση διασποράς αυτών των κυμάτων και από αυτή ή σχέση που συνδέει την

### Άσκηση 38