



4^ο ΣΥΝΟΛΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΦΥΣΙΚΗΣ III (ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ)

K. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ

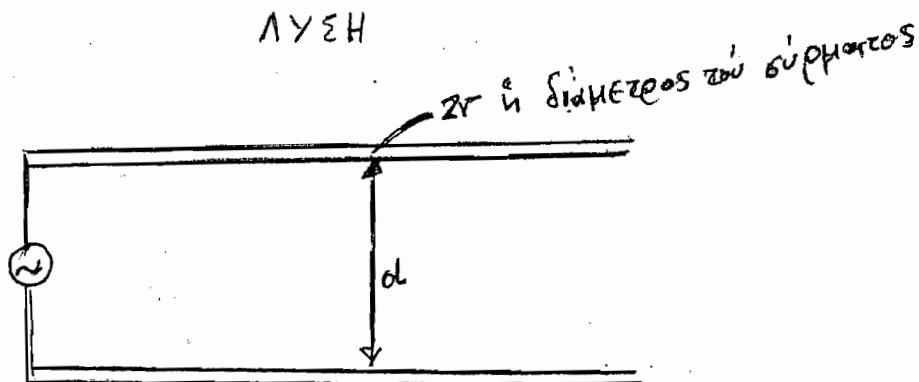
A. ΔΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρόβλημα 6.2

Δείξτε ότι η χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση ενός ζεύγους συρμάτων Lecher με ακτίνα r και απόσταση d μεταξύ τους μέσα σε ένα μέσον με μαγνητική διαπερατότητα μ και ηλεκτρική διαπερατότητα ϵ δίνεται από τη σχέση

$$Z_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \log \frac{d}{r}$$

ΛΥΣΗ



$$C_0 = \frac{c}{\omega} = \frac{\pi \epsilon}{\ln \left(\frac{d+r}{r} \right)} \quad F/m \quad (1)$$

$$L_0 = \frac{L}{2} = \frac{\mu}{\pi} \ln \left(\frac{d+r}{r} \right) \quad H/m \quad (2)$$

$$\text{Άρχη } Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{\mu}{\pi \epsilon} \frac{1}{\ln \left(\frac{d+r}{r} \right)}} = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{d+r}{r} \right) \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Όταν $r \ll d$ $\frac{d+r}{r} \approx d/r$

$$\text{Άρχη } Z_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{d}{r}$$

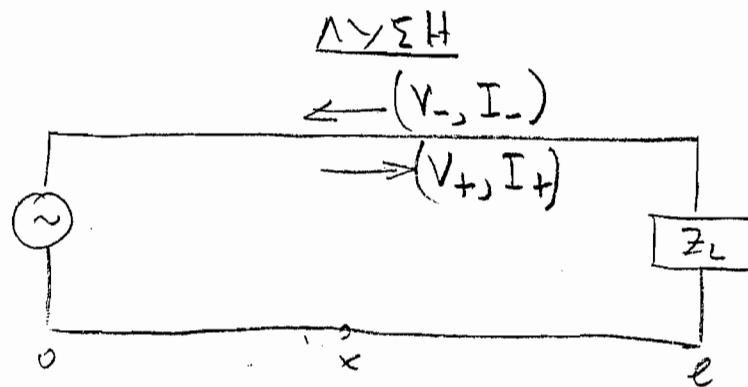
⊗ Να αποδειχθούν οι σχέσεις 1 και 2

Βλέπε Βεν. Τομ 3^{ος} σελ. 188

Δείγεται ότι η σύνθετη αντίσταση είναι δίνεται με την παραπάνω σχέση για την περίπτωση της ημιδιανταλλής, δηλαδή η σύνθετη αντίσταση μεταξύ των δύο σημείων $x=0$ και $x=l$ είναι ίση με την ημιδιανταλλή.

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L + i Z_0 \tan kL}{Z_0 + i Z_L \tan kL}$$

Η γραμμή ημιδιανταλλής είναι πιος λεπτή και τεμαχισμένη σε σεριαλ προστιθέμενη στην ημιδιανταλλή Z_L .



$$V_+(x) = A e^{i(cut - kx)}$$

$$V_-(x) = B e^{i(cut + kx)}$$

Άποψη στην ημιδιανταλλή στην οποία συμβαίνει η σχέση σχετικά με την ημιδιανταλλή:

$$Z_x = Z_0 \frac{A e^{-ikx} + B e^{ikx}}{A e^{-ikx} - B e^{ikx}} \quad \text{και} \quad Z_L = Z_0 \frac{A e^{-ikl} + B e^{ikl}}{A e^{-ikl} - B e^{ikl}}$$

$$Z_i = \frac{V(0)}{I(0)} = Z(0) = Z_0 \frac{A+B}{A-B} = Z_0 \frac{1+B/A}{1-B/A}$$

$$\frac{Z_L}{Z_0} = \frac{A e^{-ikl} + B e^{ikl}}{A e^{-ikl} - B e^{ikl}}$$

$$\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{(A e^{-ikl} + B e^{ikl}) - (A e^{-ikl} - B e^{ikl})}{(A e^{-ikl} + B e^{ikl}) + (A e^{-ikl} - B e^{ikl})} = \frac{2B e^{ikl}}{2A e^{-ikl}}$$

$$A \rho \alpha \frac{B}{A} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \frac{e^{-ikl}}{e^{ikl}}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \frac{Z_i}{Z_0} &= \frac{1 + \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \frac{\bar{e}^{ikl}}{e^{ikl}}}{1 - \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \frac{\bar{e}^{-ikl}}{e^{ikl}}} = \frac{(Z_L + Z_0)e^{ikl} + (Z_L - Z_0)\bar{e}^{-ikl}}{(Z_L + Z_0)\bar{e}^{ikl} - (Z_L - Z_0)\bar{e}^{-ikl}} = \\
 &= \frac{Z_L(e^{ikl} + \bar{e}^{-ikl}) + Z_0(e^{ikl} - \bar{e}^{-ikl})}{Z_0(e^{ikl} + \bar{e}^{-ikl}) + Z_L(e^{ikl} - \bar{e}^{-ikl})} = \\
 &= \frac{Z_L\left(\frac{e^{ikl} + \bar{e}^{-ikl}}{2}\right) + iZ_0\left(\frac{e^{ikl} - \bar{e}^{-ikl}}{2i}\right)}{Z_0\left(\frac{e^{ikl} + \bar{e}^{-ikl}}{2}\right) + iZ_L\left(\frac{e^{ikl} - \bar{e}^{-ikl}}{2i}\right)} = \\
 &= \frac{Z_L \cos kl + iZ_0 \sin kl}{Z_0 \cos kl + iZ_L \sin kl} = \frac{Z_L + iZ_0 \tan kl}{Z_0 + iZ_L \tan kl}
 \end{aligned}$$

Alex $Z_p = Z_0 \frac{Z_L + iZ_0 \tan kl}{Z_0 + iZ_L \tan kl}$

3/12/01: Av Z_0 B/A \rightarrow avuttagtions for Z_x ved vxi
i Z_i Θ uttagtions \rightarrow viwo

$$Z_x = Z_0 \frac{Z_L + iZ_0 \tan k(l-x)}{Z_0 + iZ_L \tan k(l-x)}$$

Fra $x=0$ $Z(0) = Z_i$

$x=l$ $Z_l = Z_0 \frac{Z_L + iZ_0 \tan 0}{Z_0 + iZ_L \tan 0} = Z_L$

$$V_+ = A e^{-ikx} e^{int} = A(x) e^{int}$$

$$V_- = B e^{ikx} e^{int} = B(x) e^{int}.$$

$$\left. \begin{array}{l} A(x) = A e^{-ikx} \\ B(x) = B e^{ikx} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{B(x)}{A(x)} = \frac{B}{A} \frac{e^{ikx}}{e^{-ikx}} = \frac{z_L - z_0}{z_L + z_0} \frac{\bar{e}^{-ik\ell}}{e^{ik\ell}} \frac{e^{ikx}}{e^{-ikx}}$$

Ap2

$$\boxed{\frac{B(x)}{A(x)} = \frac{z_L - z_0}{z_L + z_0} \frac{\bar{e}^{-ik(\ell-x)}}{e^{ik(\ell-x)}}}$$

$$\text{For } x=0 \quad \frac{B(0)}{A(0)} = \frac{B}{A} = \frac{z_L - z_0}{z_L + z_0} \frac{\bar{e}^{-ik\ell}}{e^{ik\ell}}$$

$$\text{For } x=\ell \quad \frac{B(\ell)}{A(\ell)} = \frac{z_L - z_0}{z_L + z_0} \frac{\bar{e}^{-i\ell}}{e^{i\ell}} = \frac{z_L - z_0}{z_L + z_0} = R_V$$

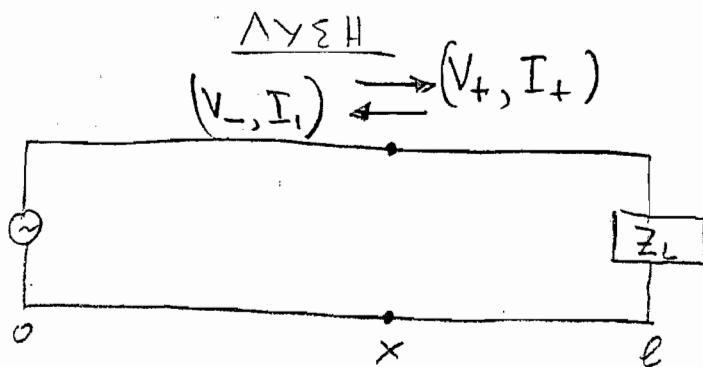
(3)

Δείγεται ότι οι συνθήματα αντιστοιχούν με την πολωνίας γεγκάνιας μετατροπών, όπως φαίνεται από τη δύση \times πάσχανταν στη γεγκάνια σίδηρη από την σφένδανη.

$$Z_x = Z_0 \frac{A e^{-ikx} + B e^{ikx}}{A e^{-ikx} - B e^{ikx}}$$

Οπου A και B είναι τα πάσχανταν στο $x=0$ την κυματική τάσης ωστε στο σύστημα να λειτουργεί η αρνητική \times αντιστοιχία. Αν οι γεγκάνιες μετατροπές εξαρτώνται και από την απόρρητη Z_L , δίγεται ότι

$$Z_L = Z_0 \frac{A e^{-ikl} + B e^{ikl}}{A e^{-ikl} - B e^{ikl}}$$



$$V_+(x,t) = A e^{i(\omega t - kx)} \quad \text{και} \quad V_-(x,t) = B e^{i(\omega t + kx)}$$

$$\alpha) \quad Z_x \equiv \frac{V_x}{I_x} = \frac{V_+(x) + V_-(x)}{I_+(x) + I_-(x)}$$

$$\alpha) \quad V_+(x) = Z_0 I_+(x) \quad \text{Εγ. 6.12} \quad \text{Ρειν}$$

$$V_-(x) = -Z_0 I_-(x) \quad \text{Εγ. 6.17} \quad \Rightarrow$$

$$\text{και} \quad Z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$$

$$Z_x = \frac{V_+(x) + V_-(x)}{\frac{1}{Z_0}(V_+(x) - V_-(x))} = Z_0 \cdot \frac{V_+(x) + V_-(x)}{V_+(x) - V_-(x)} =$$

$$= Z_0 \frac{e^{i\omega t} (A e^{-ikx} + B e^{ikx})}{e^{i\omega t} (A e^{-ikx} - B e^{ikx})}$$

Apx

$$Z_x = Z_0 \frac{A e^{-ikx} + B e^{ikx}}{A e^{-ikx} - B e^{ikx}}$$

b) $Z_L = \frac{V_e}{I_e} = Z_e = Z_0 \frac{A e^{-ikl} + B e^{ikl}}{A e^{-ikl} - B e^{ikl}}$

Apx

$$Z_L = Z_0 \frac{A e^{-ikl} + B e^{ikl}}{A e^{-ikl} - B e^{ikl}}$$

Πρόβλημα 6.3

Σε μια βραχυκύλωμένη γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες ολοκληρώστε κατά μήκος του τελευταίου τετάρτου μήκους κύματος (από 0 μέχρι $-\lambda/4$) τη μαγνητική (επαγωγική) ενέργεια $(1/2)L_0 I^2$ και την ηλεκτρική (δυναμική) ενέργεια $(1/2)C_0 V^2$ για να δείξετε ότι είναι ίσες μεταξύ τους.

ΛΥΣΗ

$$\text{2) } V_x = -2iV_{0+} \sin kx e^{i\omega t} \quad \text{Εξ. 6.27 ως βιβλίου σας}$$

$$V_x = -2iV_{0+} \sin kx (\cos \omega t + i \sin \omega t) = 2V_{0+} \sin kx (\sin \omega t - i \cos \omega t)$$

$$\text{Άρα } \boxed{\text{Re } V_x = 2V_{0+} \sin kx \sin \omega t} \quad (1)$$

$$\text{3) } I_x = \frac{2V_{0+}}{Z_0} \cos kx e^{i\omega t} \quad \text{Εξ. 6.28 ως βιβλίου σας}$$

$$I_x = \frac{2V_{0+}}{Z_0} \cos kx (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

$$\text{Άρα } \boxed{\text{Re } I_x = \frac{2V_{0+}}{Z_0} \cos kx \cos \omega t} \quad (2)$$

$$4) E_L = \frac{1}{2} L_0 (\text{Re } I_x)^2 = \frac{1}{2} L_0 \frac{4V_{0+}^2}{Z_0^2} \cos^2 kx \cos^2 \omega t$$

$$\text{ΔΙΑΦ} \quad Z_0^2 = L_0/C_0$$

$$E_L = \frac{2L_0 V_{0+}^2}{L_0/C_0} \cos^2 kx \cos^2 \omega t = \boxed{2C_0 V_{0+}^2 \cos^2 kx \cos^2 \omega t = E_L}$$

$$5) E_C = \frac{1}{2} C_0 (\text{Re } V_x)^2 = \frac{1}{2} C_0 4V_{0+}^2 \sin^2 kx \sin^2 \omega t$$

$$\text{Άρα } \boxed{E_C = 2C_0 V_{0+}^2 \sin^2 kx \sin^2 \omega t} \quad (4)$$

$$6) E_L(-\gamma_u, 0) = 2C_0 V_{0+}^2 \cos^2 \int_{-\gamma_u}^0 \cos^2 kx dx$$

$$E_C(-\gamma_u, 0) = 2C_0 V_{0+}^2 \sin^2 \int_{-\gamma_u}^0 \sin^2 kx dx$$

$$\int \cos^2 kx dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2k} \sin 2kx \right]$$

$$\int \sin^2 kx dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2k} \sin 2kx \right]$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 kx dx &= \frac{1}{2} \left[\left(0 + \frac{1}{2k} \sin 0 \right) - \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2k} \sin 2 \cdot \frac{2\pi}{k} \cdot \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[0 + 0 - \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2k} \sin \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

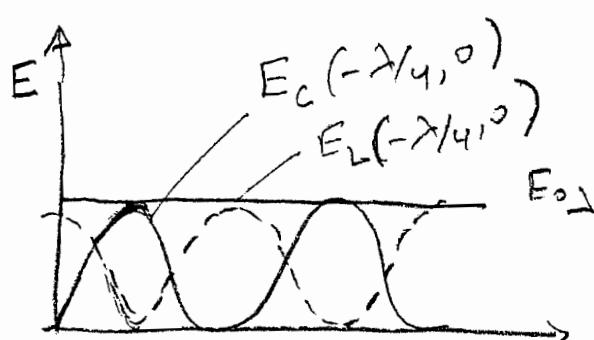
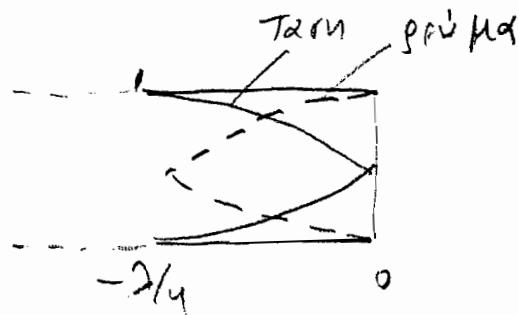
$$\text{option } \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 kx dx = \frac{\pi}{8}$$

Apd $\boxed{E_L(-\pi/4, 0) = \frac{1}{4} 2 \text{CoV}_0 + \cos^2 wt}$ (5)

$E_C(-\pi/4, 0) = \frac{1}{4} 2 \text{CoV}_0 + \sin^2 wt$

$$\begin{aligned} \bar{E}_L(-\pi/4, 0) &= \frac{1}{4} 2 \text{CoV}_0 + \overline{\cos^2 wt} = \frac{1}{8} 2 \text{CoV}_0 + \left. \right\} E_L \\ \bar{E}_C(-\pi/4, 0) &= \frac{1}{4} 2 \text{CoV}_0 + \overline{\sin^2 wt} = \frac{1}{8} 2 \text{CoV}_0 + \left. \right\} E_C \end{aligned}$$

Apd $\boxed{\bar{E}_L(-\pi/4, 0) = \bar{E}_C(-\pi/4, 0)}$ (6)



To $E_L(-\pi/4, 0)$ και ως $E_C(-\pi/4, 0)$ τα γενικών
ως ωρίς ως χρόνο με διαγόρι για την g_0

Πρόβλημα 6.8

Δείξτε ότι η σύνθετη αντίσταση εισόδου μιας βραχυκυκλώμένης γραμμής χωρίς απώλειες και με μήκος l είναι

$$Z_i = i \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \tan \frac{2\pi l}{\lambda}$$

και, σχεδιάζοντας τη μεταβολή του λόγου $Z_i / \sqrt{L_0/C_0}$ με το l , δείξτε ότι για τιμές του l μόλις μεγαλύτερες του $(2n+1)\lambda/4$ η Z_i είναι χωρητική, ενώ για τιμές του l μόλις μεγαλύτερες του $n\lambda/2$ είναι επαγγελματική. (Με αυτό τον τρόπο έχουμε θετική ή αρνητική άεργη αντίσταση για προσαρμογή με κάποια άλλη γραμμή).

ΛΥΣΗ

2) Από πρόβλημα 6.7 (Ρειν) γνωρίζουμε ότι η αντίσταση εισόδου Z_i για μια ωραγμένη βραχυκυκλώμενη δοκτρίνη θέτει

$$Z_i = Z_0 \tanh kyl \quad \gamma > Z_L = 0$$

- $\gamma = \alpha + ik$ (Εξ. 6.34) για ωραγμένη δοκτρίνη μεταγράφεται χωρίς απώλειες απλάντιση με $\alpha = 0 \rightarrow \boxed{\gamma = ik}$

Αρ2 $Z_i = Z_0 \tanh ikyl = Z_0 \frac{\sinh ikl}{\cosh ikl} = Z_0 \frac{e^{ikl} - e^{-ikl}}{e^{ikl} + e^{-ikl}}$

$$= Z_0 \frac{2i \left(\frac{e^{ikl} - e^{-ikl}}{2i} \right)}{2 \left(\frac{e^{ikl} + e^{-ikl}}{2} \right)} \oplus$$

$$= i Z_0 \frac{\sin kl}{\cos kl} = i Z_0 \tan kl$$

Θέτοντας νέα μορφή στην μέρη της Z_i , γίνεται ιδανική γραμμή ως έχουμε νοούσια στην δέ προηγούμενη σύντομη

Ευοπήνως $\boxed{Z_i = i \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \tan \frac{2\pi l}{\lambda}}$

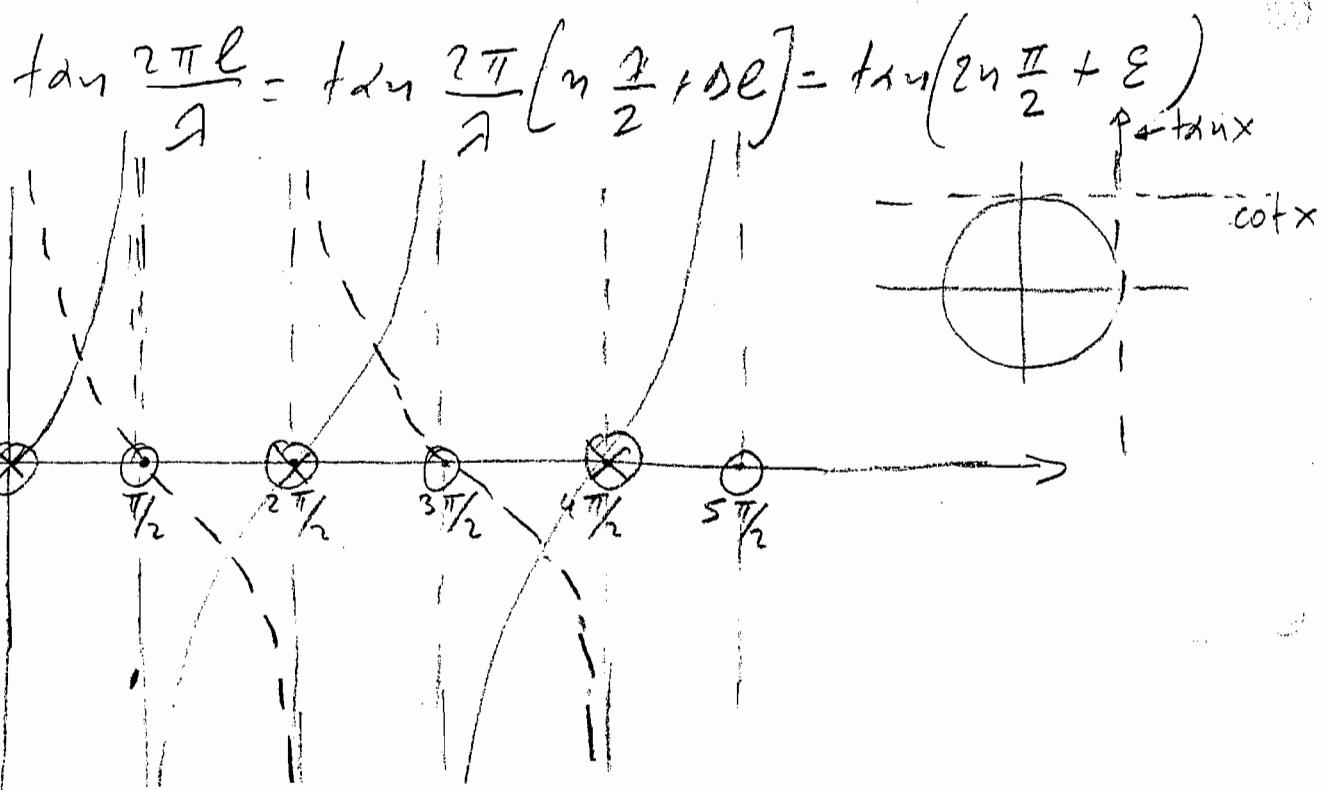
$$\begin{aligned} \oplus \quad e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ \bar{e}^{-ix} &= \cos x - i \sin x \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{e^{ix} + \bar{e}^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{ix} - \bar{e}^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

$$b) \Gamma_{12} \quad \ell = (m+1)\frac{\pi}{4} + \Delta\ell \quad \Delta\ell \ll \frac{\pi}{4}$$

$$\tan \frac{2\pi\ell}{\frac{\pi}{4}} = \tan \left[2\pi \left((m+1)\frac{\pi}{4} + \Delta\ell \right) \right] = \tan \left[(2m+1)\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi\Delta\ell}{\frac{\pi}{4}} \right]$$

$$= \tan \left[(2m+1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right] \quad \text{where } \varepsilon = 2\pi \frac{\Delta\ell}{\frac{\pi}{4}}$$

$$8) \quad \Gamma_{12} \quad \ell = n\frac{\pi}{2} + \Delta\ell \quad \Delta\ell \ll \frac{\pi}{2}$$



Γ_{12} απτα $\frac{\pi}{2}$ ($2n\frac{\pi}{2}$), $\tan(2n\frac{\pi}{2} + \varepsilon) = \tan \varepsilon \approx \varepsilon$

$$Z_1 = i\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \tan(2n\frac{\pi}{2} + \varepsilon) = i\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \tan \varepsilon \approx i\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \varepsilon = i\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} 2\pi \frac{\Delta\ell}{\frac{\pi}{2}} \quad (Z_1 = i\omega L)$$

Γ_{12} απτα $\frac{\pi}{2}$ ($(2n+1)\frac{\pi}{2}$), $\cot((2n+1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon) = \cot \varepsilon \approx -\varepsilon$

$$Z_1 = i\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \frac{1}{\cot((2n+1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon)} = i\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \frac{1}{\cot \varepsilon} \approx i\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \frac{1}{-\varepsilon} = -i\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \frac{1}{2\pi \frac{\Delta\ell}{\frac{\pi}{2}}}$$

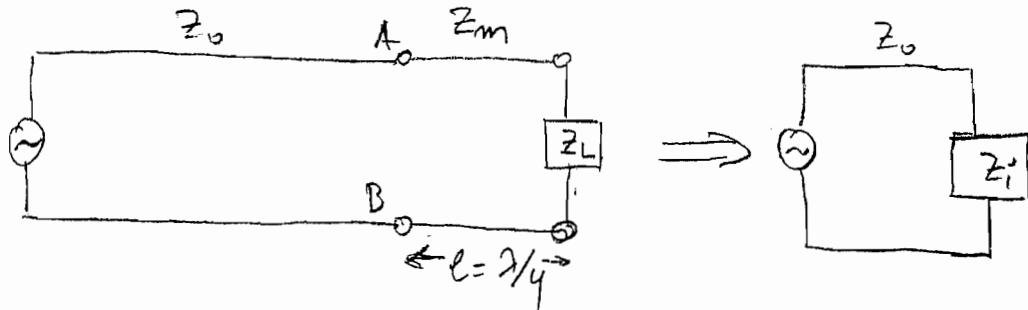
$$(Z_C = \frac{1}{i\omega_C} = -i\frac{1}{\omega_C})$$

Πρόβλημα 6.9

Δείξτε ότι μια γραμμή μεταφοράς με χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση Z_0 μπορεί να προσαρμοστεί σε κάποιο φορτίο Z_L μέσω μιας γραμμής χωρίς απώλειες και μήκους ενός τετάρτου μήκους κύματος με χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση Z_m , αν $Z_m^2 = Z_0 Z_L$.

(Υπόδειξη: υπολογίστε τη σύνθετη αντίσταση εισόδου στο σημείο σύνδεσης των Z_0 και Z_m).

ΛΥΣΗ



- (a) Για μια ωραγγιστική γραμμή η αριθταμένη φύσης διδεται ουσία την εξής:

$$Z_i = Z_0 \left(\frac{Z_0 \sinh j\lambda l + Z_L \cosh j\lambda l}{Z_0 \cosh j\lambda l + Z_L \sinh j\lambda l} \right) \quad \begin{pmatrix} \text{Γραμμή με} \\ \text{αΩώγια} \end{pmatrix}$$

για ιδανική γραμμή $\gamma = ik$ και διαφορετικός ώντας γινεται

$$\begin{aligned} Z_i &= Z_0 \left(\frac{Z_0 \sinh ikl + Z_L \cosh ikl}{Z_0 \cosh ikl + Z_L \sinh ikl} \right) = Z_0 \left(\frac{Z_L + Z_0 \tanh ikl}{Z_0 + Z_L + \tanh ikl} \right) \\ &= Z_0 \left(\frac{Z_L + i Z_0 \operatorname{tan} k l}{Z_0 + i Z_L \operatorname{tan} k l} \right) \quad \operatorname{tan} k l = i \operatorname{tan} X \end{aligned}$$

$$Z_i = Z_0 \left(\frac{Z_L + i Z_0 \operatorname{tan} k l}{Z_0 + i Z_L \operatorname{tan} k l} \right) \quad \begin{pmatrix} \text{Γραμμή χωρίς} \\ \text{αΩώγια} \end{pmatrix}$$

- (b) Η αριθταμένη φύσης στα μέρη A-B δεν είναι

$$Z_i = Z_m \left(\frac{Z_L + i Z_m \operatorname{tan} k l}{Z_m + i Z_L \operatorname{tan} k l} \right) = Z_m \left[\frac{\frac{Z_L}{\operatorname{tan} k l} + i Z_m}{\frac{Z_m}{\operatorname{tan} k l} + i Z_L} \right]$$

$$\tan k = \tan \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x}{4} = \tan \frac{\pi}{2} = \infty$$

$$\text{Ansatz } Z_i = Z_m \left[\frac{0 + i Z_m}{0 + i Z_L} \right] = \frac{Z_m^2}{Z_L}$$

1) & 2) even triggert in waardeweg in π₀(ΠΣ)

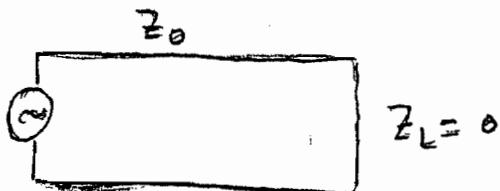
$$Z_o = Z_i = \frac{Z_m^2}{Z_L} \Rightarrow \boxed{Z_m = \sqrt{Z_o Z_L}}$$

Πρόβλημα 6.10

Δείξτε ότι μια βραχυκυκλωμένη γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες και με μήκος ενός τετάρτου μήκους κύματος ($\lambda/4$) έχει άπειρη σύνθετη αντίσταση και ότι, αν συνδεθεί παράλληλα με μια άλλη γραμμή μεταφοράς σε κάποιο της σημείο, δε θα επηρεάσει το σήμα στο θεμελιώδες μήκος κύματος (λ) αλλά θα βραχυκυκλώσει οποιαδήποτε (ανεπιθύμητη) δεύτερη αρμονική.

ΛΥΣΗ

d)



$$l = \lambda/4$$

$$\text{Για γεραμμή χωρίς οιωνώσεις } Z_i = Z_0 \left(\frac{Z_L + i Z_0 \tan k\ell}{Z_0 + i Z_L \tan k\ell} \right)$$

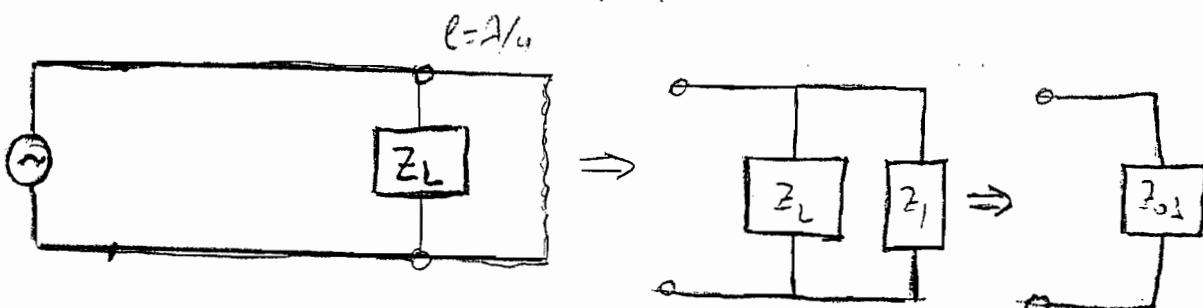
$$\text{για } Z_L = 0 \rightarrow Z_i = Z_0 \left(\frac{0 + i Z_0 \tan k\ell}{Z_0 + 0} \right)$$

Αριτ.

$$Z_i = i Z_0 \tan k\ell$$

$$\text{για } l = \lambda/4 \rightarrow Z_i = i Z_0 \tan \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = i Z_0 \tan \frac{\pi}{2} = \infty$$

e)



$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_i} \quad , \text{ αλλά } Z_i = \infty \Rightarrow Z_{eq} = Z_L$$

Αριτ. σενεντέρης η σημείωση στο θεμελιώδες μήκος κύματος

- δεύτερη αρμονική $V_2 = 2V$ $\rightarrow Z_2 = \lambda/2$ και $Z_i = i Z_0 \tan \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = i Z_0 \tan \pi = 0 \rightarrow Z_i = 0$

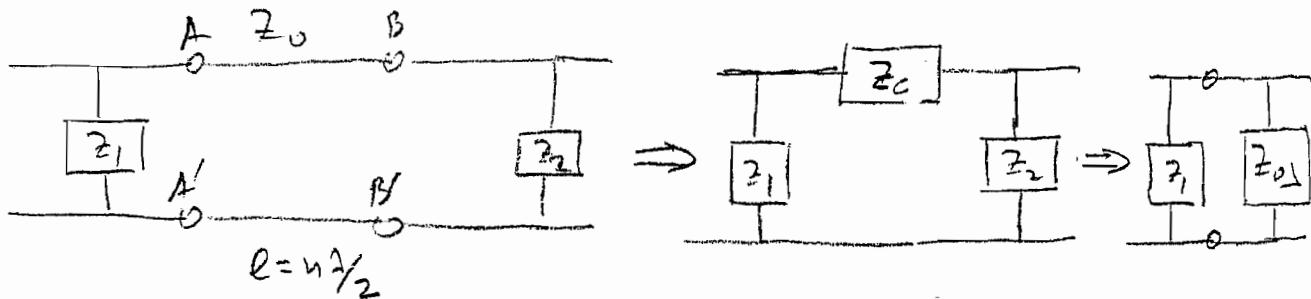
Αριτ. $\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{0} \Rightarrow Z_{eq} = 0$. Εποκίνωνος ή δραστηριότητας βραχυκυκλώματος δεν θα σημειωθεί αρμονική.

Πρόβλημα 6.11

Pain

Δείξτε ότι μια γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες με χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση Z_0 και μήκος $n\lambda/2$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη σύζευξη δύο κυκλωμάτων υψηλών συχνοτήτων χωρίς να επηρεάσει άλλες σύνθετες αντιστάσεις.

ΛΥΣΗ



$\xrightarrow{\quad Z_0 \quad}$ ΕΧΕΙ ουδισταμενούς εισόδου

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\quad l=n\lambda/2 \quad} Z_j &= i Z_0 \tan k l = i Z_0 \tan \frac{2\pi}{\lambda} \frac{n\lambda}{2} = \\ &= i Z_0 \tan n\pi = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } Z_{0J} = Z_c + Z_2 = 0 + Z_2$$

Ειδοπέριως δινεται στην πίνθεμη συνταγματική Z_2

οπου μη δημιουργείται πινθεμη συνταγματική Z_2 .

Οποιων για τα σημεία $B B'$

Πρόβλημα 8.1

Δείξτε ότι το

$$z = A e^{i(\omega t - (k_1 x + k_2 y))}$$

όπου $k^2 = \omega^2/c^2 = k_1^2 + k_2^2$, είναι μια λύση της διδιάστατης κυματικής εξίσωσης

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

ΛΥΣΗ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -i k_1 z \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (-i k_1)^2 z = -k_1^2 z$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -i k_2 z \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-i k_2)^2 z = -k_2^2 z$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = i \omega z \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = (i \omega)^2 z = -\omega^2 z$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -k_1^2 z - k_2^2 z = -(k_1^2 + k_2^2) z = -\frac{\omega^2}{c^2} z = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Ενοπλίνως η z είναι λύση της διδιάστατης

κυματικής εξίσωσης

Πρόβλημα 8.2

Δείξτε ότι, αν η μετατόπιση των κυμάτων στη μεμβράνη πλάτους b του Σχ. 8.3 δίνεται από την υπέρθεση

$$z = A_1 \sin [\omega t - (k_1 x + k_2 y)] + A_2 \sin [\omega t - (k_1 x - k_2 y)]$$

με συνοριακές συνθήκες

$$z = 0 \text{ στα } y = 0 \text{ και } y = b$$

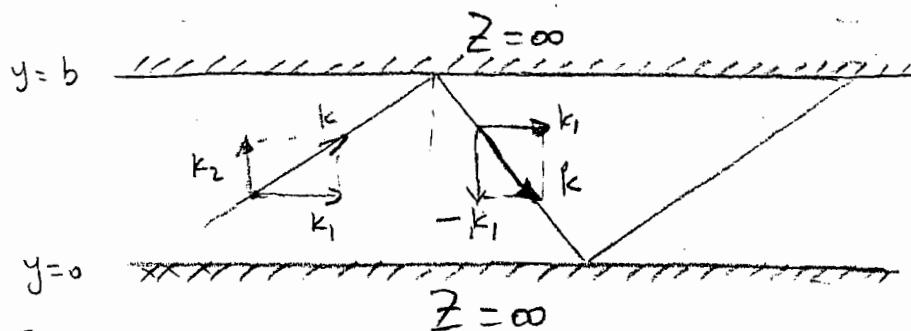
τότε

$$z = -2A_1 \sin k_2 y \cos (\omega t - k_1 x)$$

όπου

$$k_2 = \frac{n\pi}{b}$$

ΛΥΣΗ



a) Για $y=0$

$$0 = A_1 \sin [\omega t - k_1 x] + A_2 \sin [\omega t - k_1 x] \quad \text{if} \quad A_1 = -A_2$$

$$\begin{aligned} b) \quad Z &= \operatorname{Im} \left[A_1 e^{i(\omega t - k_1 x - k_2 y)} - A_1 e^{i(\omega t - k_1 x + k_2 y)} \right] = \\ &= \operatorname{Im} \left[A_1 e^{i(\omega t - k_1 x)} \left[e^{-ik_2 y} - e^{ik_2 y} \right] \right] = \\ &= \operatorname{Im} \left[2i A_1 \sin k_2 y e^{i(\omega t - k_1 x)} \right] = \\ &= \operatorname{Im} \left[-2i A_1 \sin k_2 y (\cos(\omega t - k_1 x) + i \sin(\omega t - k_1 x)) \right] = \\ &= -2A_1 \sin k_2 y \cos(\omega t - k_1 x) \end{aligned}$$

8) Για $y=b$

$$0 = -2A_1 \sin k_2 b \cos(\omega t - k_1 x) \quad \text{if} \quad \sin k_2 b = 0 \Rightarrow \underline{k_2 b = n\pi}$$

$$\textcircled{*} \quad e^{-ik_2 y} - e^{ik_2 y} = \cos k_2 y - i \sin k_2 y - \cos k_2 y - i \sin k_2 y = -2i \sin k_2 y$$

Πρόβλημα 8.11

Pain

Θεωρήστε τώρα την επέκταση του προβλήματος 8.2 όπου τα κύματα ανακλώνται στις σταθερές ακμές της ορθογωνικής μεμβράνης με μήκη πλευρών a και b όπως φαίνεται στο σχήμα. Η τελική απομάκρυνση είναι το αποτέλεσμα της υπέρθεσης

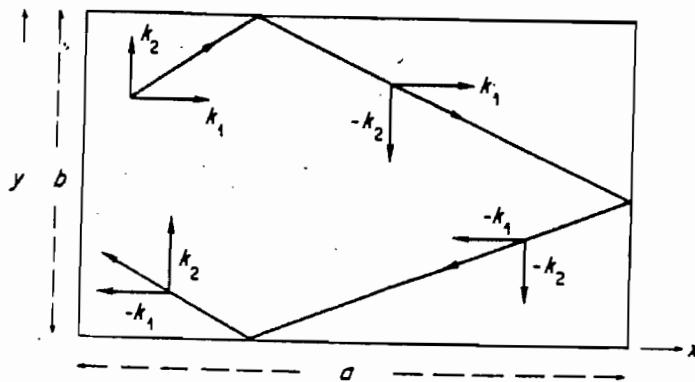
$$\begin{aligned} z = & A_1 \sin [\omega t - (k_1 x + k_2 y)] \\ & + A_2 \sin [\omega t - (k_1 x - k_2 y)] \\ & + A_3 \sin [\omega t - (-k_1 x - k_2 y)] \\ & + A_4 \sin [\omega t - (-k_1 x + k_2 y)] \end{aligned}$$

με τις συνοριακές συνθήκες

$$z = 0 \text{ στα } x = 0 \text{ και } x = a$$

και

$$z = 0 \text{ στα } y = 0 \text{ και } y = b$$



Δείξτε ότι αυτό οδηγεί σε μια μετατόπιση

$$z = -4A_1 \sin k_1 x \sin k_2 y \sin \omega t$$

όπου

$$k_1 = \frac{n_1 \pi}{a} \text{ και } k_2 = \frac{n_2 \pi}{b}$$

ΛΥΣΗ

Οριαρής συνθίκης

a) $z = 0$ στο $x = 0 \neq t$

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Im} \left[A_1 e^{i(\omega t - k_2 y)} + A_2 e^{i(\omega t + k_2 y)} + A_3 e^{i(\omega t + k_2 y)} + A_4 e^{i(\omega t - k_2 y)} \right] = \\ &= \operatorname{Im} e^{i\omega t} \left[(A_1 + A_4) e^{-ik_2 y} + (A_2 + A_3) e^{ik_2 y} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Αρχ} \quad A_1 + A_4 &= 0 \rightarrow A_4 = -A_1 \\ A_2 + A_3 &= 0 \rightarrow A_3 = -A_2 \end{aligned}$$

b) $z = 0$ στο $y = 0 \neq t$

$$0 = \operatorname{Im} \left[A_1 e^{i(\omega t - k_1 x)} + A_2 e^{i(\omega t - k_1 x)} - A_2 e^{i(\omega t + k_1 x)} - A_1 e^{i(\omega t + k_1 x)} \right]$$

$$O = \operatorname{Im} e^{i\omega t} \left[(A_1 + A_2) e^{-ik_1 x} - (A_1 + A_2) e^{ik_1 x} \right]$$

$$\text{A.P.V } A_1 + A_2 = 0 \Rightarrow \boxed{A_2 = -A_1}$$

$$\text{T.F.U.W} \quad A_2 = -A_1, A_3 = A_1 \text{ and } A_4 = -A_1$$

$$\begin{aligned} \text{A.P.V } Z &= \operatorname{Im} A_1 e^{i\omega t} \left[e^{-ik_1 x} - e^{ik_1 x} - e^{ik_2 y} e^{ik_2 y} + e^{ik_1 x} e^{ik_2 y} - e^{ik_1 x} e^{-ik_2 y} \right] = \operatorname{Im} A_1 e^{i\omega t} \left[e^{ik_1 x} (e^{ik_2 y} - e^{-ik_2 y}) + \right. \\ &\quad \left. - e^{-ik_1 x} (e^{ik_2 y} - e^{-ik_2 y}) \right] = \operatorname{Im} \left[A_1 e^{i\omega t} (2i) \frac{(e^{ik_2 y} - e^{-ik_2 y})}{(2i)} \right]. \end{aligned}$$

$$\bullet (7i) \frac{e^{ik_1 x} - e^{-ik_1 x}}{(2i)} = \operatorname{Im} A_1 e^{i\omega t} (-4) \sin k_1 y \sin k_1 x =$$

$$= \operatorname{Im} (-4 A_1 \sin k_1 x \sin k_1 y (\cos \omega t + i \sin \omega t))$$

$$\text{A.P.V } \boxed{Z = -4 A_1 \sin k_1 x \sin k_1 y \sin \omega t}$$

$$8) Z=0, x=a \forall t \rightarrow \sin k_1 a = 0 \Rightarrow k_1 a = n\pi \rightarrow \boxed{k_1 = \frac{n\pi}{a}}$$

$$Z=0, y=b \forall t \rightarrow \sin k_2 b = 0 \rightarrow k_2 b = n\pi \rightarrow \boxed{k_2 = \frac{n\pi}{b}}$$

$$\textcircled{*} \quad \frac{e^{ix} - \bar{e}^{-ix}}{2i} = \frac{\cos x + i \sin x - (\cos x - i \sin x)}{2i} = \frac{2i \sin x}{2i} = \sin x$$

B. ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΟΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Να παραδίδονται 2-3 ασκήσεις ανά εβδομάδα)

30. Μια ομοαξονική γραμμή μεταφοράς, με χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση $Z_1=50\Omega$ ενώνεται με μια άλλη γραμμή με χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση $Z_2=100\Omega$.

- Ένας παλμός δυναμικού με μέγιστη τιμή $+10V$, προσπίπτει από τη γραμμή των 50Ω στη γραμμή των 100Ω . Ποιο είναι το "ύψος" του παλμού που ανακλάται και του παλμού που μεταδίδεται.
- Αν ο ίδιος παλμός προσπίπτει από τη γραμμή των 100Ω στη γραμμή των 50Ω , ποιο είναι το ύψος του παλμού που ανακλάται και του παλμού που διαδίδεται.

31. Δείξτε ότι μεταξύ φασικής και ομαδικής ταχύτητας λαμβάνεται η σχέση $v_\phi = v_\theta - \lambda d v_\theta / d \lambda$.

32. Λύστε τις ασκήσεις 4.14, 4.15 και 4.19 του Pain.

33. Η σχέση διασποράς για κύματα σε θαθειά νερά είναι

$$\omega^2 = gk + \frac{T k^3}{\rho}$$

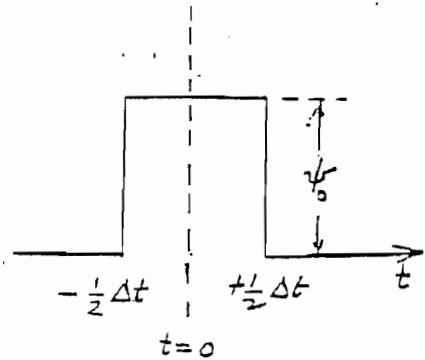
όπου $g=9.8 \text{ m/s}^2$, $T=\text{συντελεστής επιφ. τάσεως}=72 \times 10^{-3} \text{ Nm}^{-1}$ και $\rho=\text{πυκνότητα νερού}=10^3 \text{ kgm}^{-3}$.

- Βρείτε τις εκφράσεις για την ομαδική και φασική ταχύτητα. 2) Δείξτε ότι οι δύο αυτές ταχύτητες είναι ίσες όταν $\lambda=1.7 \text{ cm}$ και $u=23.1 \text{ cm.s}^{-1}$. Δείξτε πρώτα ότι η λαμβάνεται σταν $gk = T k^3 / \rho$. 3) Δείξτε ότι για κύματα που οφείλονται στην επιφανειακή τάση

(δηλ. $\lambda << 1.7 \text{ cm}$) είναι $u_g = 3/2 u_\theta$, ενώ για κύματα που οφείλονται στη θαθειά νερά (δηλ. $\lambda >> 1.7 \text{ cm}$) $u_g = 1/2 u_\theta$.

34. Ένα φράγμα προσβάλλεται από σεισμό χρονικής διάρκειας Δt . Για άπλοτητα υποστούμε πώς ο σεισμός αύτος έχει τη μορφή τετραγωνικού παλμού στόχο χρόνο, μέσονάρχηση $\psi_0 = 1 \text{ mm}$.

- Άν $\Delta t = 2s$, πόσο είναι το πλάτος καθέ αρμονικής συνιστώσας Fourier αύτού στού σεισμού; Σχεδιάστε το πλάτος των συνιστώσων αύτων συναρτήσεις της συχνότητας v σε Hz. Σέ ποιες τιμές τού σημείωσης τού μηδενίζεται το πλάτος;
- Όι συχνότητες έγκαρσιας ταλάντωσης τού φράγματος είναι $v_1 = 0.2 \text{ Hz}$, $v_2 = 0.4 \text{ Hz}$, $v_3 = 0.6 \text{ Hz}$, ... Ποιά είναι ή έλαχιστη χρονική διάρκεια ένσης (τετραγωνικού) σεισμού για την άποινα δλεις ού συχνότητες ταλάντωσης τού φράγματος βρύσκονται έξω από το κύριο μέγιστο (δηλ. είναι μεγαλύτερες, από την πρώτη ρύζα) τού συντελεστή Fourier $\beta(\psi)$ αύτού τού σεισμού;



35. Δείξτε ότι για το γυαλί με δείκτη διάθλασης $n=1.52$ η κρίσιμη γωνία για ολική ανάκλαση είναι περίπου $\theta = 41.2^\circ$. Υπολογίστε την απόσταση δ που διανύει το φως μήκους κύματος λ στον αέρα όταν πέφτει στη διαχωριστική επιφάνεια γυαλί - αέρας με γωνία $\theta > \theta_c$

36. Λύστε τις ασκήσεις 6.4 και 6.7 του Pain.