



2^ο ΣΥΝΟΛΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΦΥΣΙΚΗΣ III (ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ)

Κ. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ

A. ΔΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρόβλημα 4.11

Δείξτε ότι η απομάκρυνση y_n της έκφρασης στάσιμου κύματος στην εξίσωση (4.86) ικανοποιεί τη χρονικά ανεξάρτητη μορφή της κυματικής εξίσωσης

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + k^2 y = 0.$$

ΛΥΣΗ

Κυματική έξιση $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$

Γενική λύση για η-οστό τρόπο ταξινομώντας σταθιμούς κύματα (Εξ. 4.86)

$$\psi_n = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{\omega_n x}{c}$$

$$\psi_n = (A'_n \sin k_n x + B'_n \cos k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad \omega_n^2 = c^2 k_n^2$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = (-\omega_n A_n \sin \omega_n t + \omega_n B_n \cos \omega_n t) \sin \frac{\omega_n x}{c}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2} = -\omega_n^2 (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{\omega_n x}{c} = -\omega_n^2 \psi_n$$

Ανακαθιστώντας στις κυματική έξιση

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} (-\omega_n^2 \psi_n) = -k_n^2 \psi_n$$

Εποκίνωσ η ψ_n λανσώνοντας τη χρονικά ανεξάρτητη μορφή της κυματικής έξισης

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0$$

Πρόβλημα 4.12

Η ολική ενέργεια E_n ενός κανονικού τρόπου ταλάντωσης μπορεί να βρεθεί με μια

εναλλακτική μέθοδο. Κάθε τμήμα dx της χορδής είναι ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής με ολική ενέργεια ίση με τη μέγιστη κινητική ενέργεια της ταλάντωσης

$$k.e_{\max} = \frac{1}{2} \rho dx (\dot{y}_n^2)_{\max} = \frac{1}{2} \rho dx \omega_n^2 (y_n^2)_{\max}$$

Τώρα, η τιμή του $(y_n^2)_{\max}$ σε ένα σημείο x της χορδής δίνεται από το

$$(y_n^2)_{\max} = (A_n^2 + B_n^2) \sin^2 \frac{\omega_n x}{c}$$

Δείξτε ότι το άθροισμα των ενεργειών των ταλαντωτών κατά μήκος της χορδής, δηλαδή το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2} \rho \omega_n^2 \int_0^l (y_n^2)_{\max} dx$$

δίνει το αναμενόμενο αποτέλεσμα.

ΛΥΣΗ

$$dE_n = d(K_{n,\max}) = \frac{1}{2} \rho dx (\dot{y}_{n,\max})^2 \quad (1)$$

$$\Psi_n = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{\omega_n x}{c} \quad \text{Εξ. 4.86 Ραιν}$$

$$\dot{\Psi}_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \sin(\omega_n t + \varphi) \sin \frac{\omega_n x}{c} \quad \tan \varphi = A_n / B_n$$

$$\dot{\Psi}_{n,\max} = \omega_n \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \cos(\omega_n t + \varphi) \sin \frac{\omega_n x}{c}$$

$$\dot{\Psi}_{n,\max} = \omega_n \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \sin \frac{\omega_n x}{c} = \omega_n \Psi_{n,\max}$$

Η Εξ.(1) γράφεται: $dE_n = \frac{1}{2} \rho dx \omega_n^2 (\Psi_{n,\max})^2 =$
 $= \frac{1}{2} \rho \omega_n^2 (A_n^2 + B_n^2) \sin^2 \frac{\omega_n x}{c} dx$

Η ολική ενέργεια είναι:

$$E_n = \frac{1}{2} \rho \omega_n^2 (A_n^2 + B_n^2) \int_0^l \sin^2 \frac{\omega_n x}{c} dx$$

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\omega_n x}{c} dx = \int_0^l \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{l} \right) dx = \frac{l}{2}$$

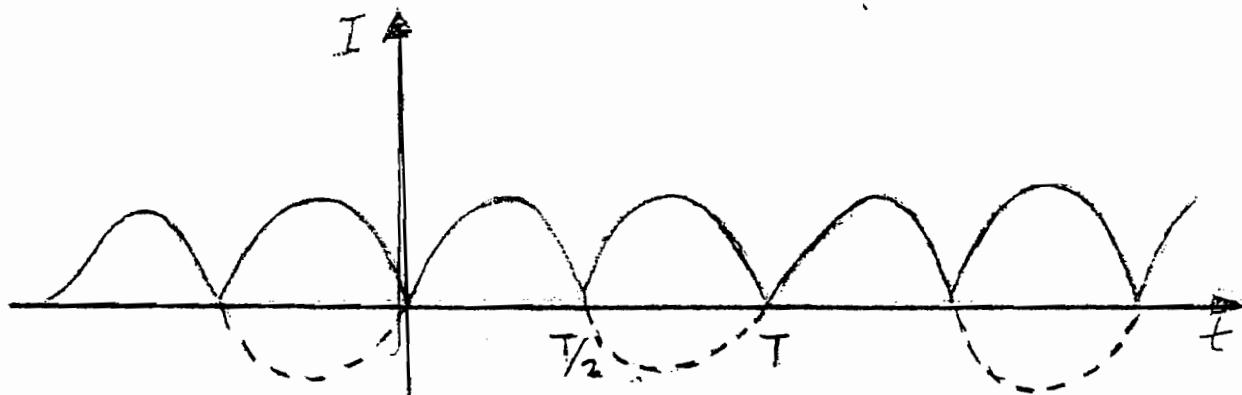
Άρα

$$E_n = \frac{1}{4} \rho l \omega_n^2 (A_n^2 + B_n^2)$$

Αναλύστε σε σειρά Fourier ένα ανορθωμένο εναλλασσόμενο ρεύμα.

(2)

ΛΥΣΗ



ΛΥΣΗ

- Η αρχική συάρτηση έχει ωρίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$ και είναι της μορφής $I = I_0 \sin \omega t$
- Η ανορθωμένη είναι ωφελοδική μέωριοδο $T/2$ και κυρίως συχνόσημα 2ω , τοιούτης είναι άποψια όπου θέλεται γεγονός ότι είναι της μορφής

$$I = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n2\omega t \quad B_0 = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I_0 \sin \omega t dt$$

$$B_n = \frac{2}{T/2} \int_0^{T/2} I_0 \sin \omega t \cos n2\omega t dt$$

Υπολογισμός του B_0

$$B_0 = \frac{2I_0}{T} \int_0^{T/2} -\frac{1}{\omega} d(\cos \omega t) = -\frac{2I_0}{T\omega} \cos \omega t \Big|_0^{T/2} = -\frac{2I_0}{T} \left(\cos \frac{2\pi T}{T} - 1 \right)$$

$$= -\frac{I_0}{\pi} (\cos \pi - 1) = \frac{2I_0}{\pi} \quad \text{Άρα}$$

$$\boxed{B_0 = \frac{2I_0}{\pi}}$$

Υπολογισμός των B_n

$$\begin{aligned}
 B_n &= \frac{4I_0}{T} \int_0^{T/2} \frac{1}{2} [\sin((1+2n)\omega t) + \sin((1-2n)\omega t)] dt = \\
 &= \frac{2I_0}{T} \int_0^{T/2} \left(-\frac{1}{(1+2n)\omega} d\cos((1+2n)\omega t) - \frac{1}{(1-2n)\omega} d\cos((1-2n)\omega t) \right) = \\
 &= -\frac{2I_0}{T\omega} \left[\frac{\cos((1+2n)\omega t)}{(1+2n)} \Big|_0^{T/2} + \frac{\cos((1-2n)\omega t)}{(1-2n)} \Big|_0^{T/2} \right] = \\
 &= -\frac{2I_0}{T \frac{2\pi}{\omega}} \left[\frac{\cos((1+2n)\frac{2\pi}{\omega} \frac{T}{2}) - 1}{1+2n} + \frac{\cos((1-2n)\frac{2\pi}{\omega} \frac{T}{2}) - 1}{1-2n} \right] = \\
 &= -\frac{I_0}{\pi} \left[\frac{\cos((1+2n)\pi) - 1}{1+2n} + \frac{\cos((1-2n)\pi) - 1}{1-2n} \right] = \\
 &\stackrel{\alpha \neq 0}{=} \left. \frac{\cos((1+2n)\pi)}{\cos((1-2n)\pi)} \right\} = -1 \quad \forall n \\
 &= -\frac{I_0}{\pi} \left(\frac{-2}{1+2n} + \frac{-2}{1-2n} \right) = \frac{2I_0}{\pi} \left(\frac{1-3n+1+2n}{1-4n^2} \right) = -\frac{4I_0}{\pi} \frac{1}{4n^2-1}
 \end{aligned}$$

Aed
$$B_n = -\frac{4I_0}{\pi} \frac{1}{4n^2-1}$$

$$I(t) = \frac{2I_0}{\pi} - \frac{2I_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} \cos n 2\omega t$$

$$I(t) = \frac{2I_0}{\pi} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} \cos n 2\omega t \right)$$

$$I(t) = \frac{2I_0}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \frac{2}{35} \cos 6\omega t \dots \right)$$

Πρόβλημα (2.3)

(3)

Η εξίσωση $m\ddot{x} + sx = F_0 \sin \omega t$ περιγράφει την κίνηση ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή χωρίς απόσβεση που διεγέρεται από μια δύναμη με γωνιακή συχνότητα ω . Λύνοντας την εξίσωση σε διανυσματική μορφή δείξτε ότι η λύση για τη μόνιμη κατάσταση δίνεται από τη σχέση

$$x = \frac{F_0 \sin \omega t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \text{όπου } \omega_0^2 = \frac{s}{m}$$

Σχεδιάστε τη συμπεριφορά του πλάτους του x συναρτήσει της ω και προσέξτε ότι η αλλαγή στο πρόσημο, καθώς η ω υπερβαίνει την ω_0 , ισοδυναμεί με μεταβολή π ακτινίων στη φάση της μετατόπισης. Δείξτε τώρα ότι η γενική λύση για τη μετατόπιση είναι

$$x = \frac{F_0 \sin \omega t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

όπου τα A και B είναι σταθερά.

ΛΥΣΗ

$$m\ddot{x} + sx = F_0 \sin \omega t \quad \text{in} \quad m\ddot{x} + s\tilde{x} = F_0 e^{i\omega t}$$

$$\text{Άνω γης μορφής } \tilde{x} = \tilde{A} e^{i\omega t}$$

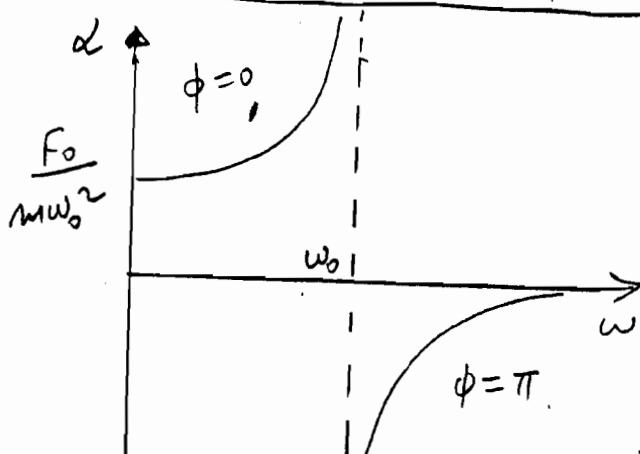
$$\dot{\tilde{x}} = i\omega \tilde{A} e^{i\omega t} \quad \text{και} \quad \ddot{\tilde{x}} = -\omega^2 \tilde{A} e^{i\omega t} = -\omega^2 \tilde{x}$$

$$\text{Αρι} \quad -m\omega^2 \tilde{A} e^{i\omega t} + s\tilde{A} e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t}$$

$$\tilde{A} = \frac{F_0}{(-m\omega^2 + s)} = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad \omega_0^2 = s/m$$

$$x = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

και
$$x = \operatorname{Im} \tilde{x} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t = \alpha \sin \omega t$$



$$\text{Τήλωση} \quad \alpha = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\text{για} \quad \omega = 0 \quad \alpha = F_0 / m\omega_0^2$$

$$\text{για} \quad \omega < \omega_0 \quad x = \frac{F_0 \sin \omega t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

στη φάση μή είναι δύναμη, $g = 0$

$$\text{για} \quad \omega > \omega_0 \quad x = -\frac{F_0 \sin \omega t}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} = \frac{F_0 \sin(\omega t + \pi)}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

σιαροπή φάσης π μή είναι δύναμη, $g = \pi$

Η λύση της οθόγνωσας φύσιου χρόνου $m\ddot{x} + sx = 0$

Είναι: $x_0 = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ κι $\omega_0^2 = s/m$

Η γενική λύση της $m\ddot{x} + sx = F_0 \sin \omega t$ είναι

$$x = \frac{F_0 \sin \omega t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

Πρόβλημα 2.4

Στο πρόβλημα 2.3, αν $x = \dot{x} = 0$ στο χρόνο $t = 0$, δείξτε ότι

$$x = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right)$$

και γράφοντας $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, όπου το $\Delta\omega$ είναι μικρό, δείξτε ότι κοντά στο συντονισμό,

$$x = \frac{F_0}{2m\omega_0^2} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t)$$

Σχεδιάστε αυτή τη συμπεριφορά, σημειώνοντας ότι ο δεύτερος όρος αυξάνει με το χρόνο οδηγώντας σε μια αύξηση των ταλαντώσεων (συντονισμός ανάμεσα στις ελεύθερες και τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις).

ΛΥΣΗ

Για $m\ddot{x} + sx = F_0 \sin \omega t$, η γενική λύση είναι

$$x = \frac{F_0 \sin \omega t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad \omega_0^2 = s/m$$

ΒΔΙΤΙΞ θεματική 2.3

Αν για $t = 0$, $x = 0 \Rightarrow 0 = 0 + A + 0 \Rightarrow A = 0$ και

$$\dot{x} = \frac{\omega F_0 \cos \omega t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + \omega_0 B \cos \omega_0 t$$

Αν για $t = 0$ $\dot{x} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\omega F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + \omega_0 B$

$$\text{και } B = -\frac{\frac{\omega}{\omega_0} F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Άρα

$$x = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right)$$

Av $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ με $\Delta\omega$ μικρό, τότε

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \Delta\omega)(\omega_0 - \omega) = 2\omega_0(-\Delta\omega) = -2\omega_0\Delta\omega$$

και $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_0 + \Delta\omega}{\omega_0} = 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$

$$\sin \omega t = \sin(\omega_0 t + \Delta\omega t) = \sin \omega_0 t \cos \Delta\omega t + \cos \omega_0 t \sin \Delta\omega t$$

Για μικρό $\Delta\omega t$, σημαίνει ότι $\frac{1}{\Delta\omega} \sin \Delta\omega t \approx \Delta\omega t$ και $\cos \Delta\omega t \approx 1$

και $\sin \omega t \approx \sin \omega_0 t + \Delta\omega t \cos \omega_0 t$

$$\text{Επομένως } x \approx \frac{F_0}{m \omega_0^2 \Delta\omega} \left[\sin \omega_0 t + \Delta\omega t \cos \omega_0 t - \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \sin \omega_0 t \right]$$

$$= -\frac{F_0}{2m\omega_0 \Delta\omega} \left[\sin \omega_0 t + \Delta\omega t \cos \omega_0 t - \cancel{\sin \omega_0 t} - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right] =$$

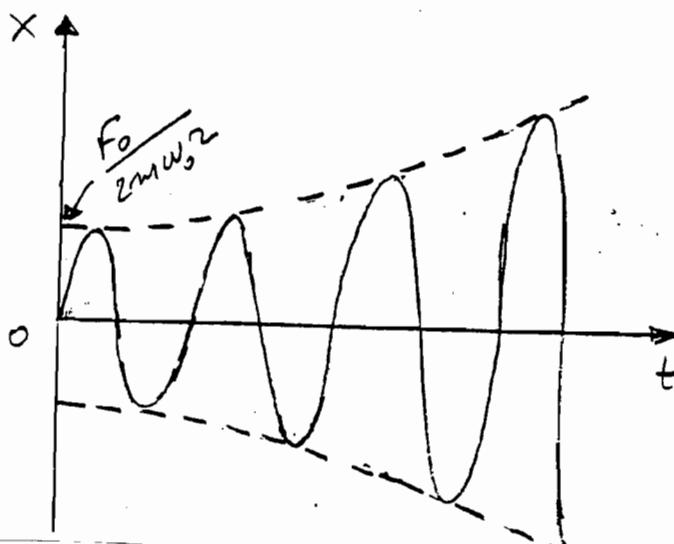
$$= \frac{F_0}{2m\omega_0 \Delta\omega} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \Delta\omega t \cos \omega_0 t \right) = \frac{F_0}{2m\omega_0^2} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t)$$

Τελικά $x \approx \frac{F_0}{2m\omega_0^2} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t)$

το x είναι ως παραγόντες $x = \alpha c (\sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t) =$

$$= \alpha c \sin(\omega_0 t - \varphi) \quad \text{οπου } c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{και } \tan \varphi = -c_2/c_1$$

Άρχια $x = \frac{F_0}{2m\omega_0^2} \sqrt{1 + \omega_0^2 t^2} \sin(\omega_0 t - \varphi)$, $\tan \varphi = \omega_0 t$



Παραγόντες: $\frac{F_0}{2m\omega_0^2} \sqrt{1 + \omega_0^2 t^2}$

Πρόβλημα 2.9

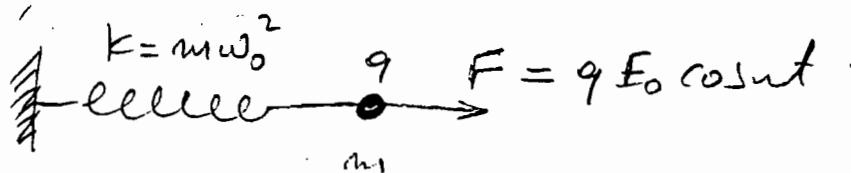
Η εξίσωση $\ddot{x} + \omega_0^2 x = (-eE_0/m) \cos \omega t$ περιγράφει την κίνηση ενός ελεύθερου και χωρίς απόσβεση ηλεκτρικού φορτίου $-e$ με μάζα m , κάτω από την επίδραση ενός εναλλασσόμενου ηλεκτρικού πεδίου $E = E_0 \cos \omega t$. Για τη ηλεκτρόνια ανά μονάδα όγκου (η δυναμική ηλεκτρική επιδεκτικότητα) του μέσου είναι

$$\chi_e = -\frac{n e x}{\epsilon_0 E} = \frac{n e^2}{\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

(η διηλεκτρική σταθερά ενός μέσου ορίζεται ως $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$, όπου ϵ_0 είναι η διηλεκτρική σταθερά του κενού. Η σχετική διηλεκτρική σταθερά $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ ισούται με το τετράγωνο του δείκτη διάθλασης, όταν E είναι το ηλεκτρικό πεδίο ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος).

ΛΥΣΗ

- α) Πρότυπο κίνησης ένας ηλεκτρονίου σε ένα διηλεκτρικό όχημα την έπιδραση ένας ηλεκτρικού πεδίου $E = E_0 \cos \omega t$.



Εξ. κίνησης: $m \ddot{z} = -m \omega_0^2 z - m \Gamma \dot{z} + q E \quad (1)$

Για τη μικρό και μακριά όποια τη θέση του συντονισμού, δηλαδή για $\omega \neq \omega_0$, τη μόνη λύση της (1) μαρούν να θεραπεύεται ο θίτωνας και ευθεία $\Gamma = 0$

Συγχρηματική $\ddot{z} + \omega_0^2 z = \frac{q E_0}{m} \cos \omega t \quad (2)$

Η τιμή της (2) εξαιρετικά λογρήσιμη

$$z = A \cos \omega t \quad (3)$$

$$-\omega^2 A \cos \omega t + \omega_0^2 A \cos \omega t = \frac{q E_0}{m} \cos \omega t$$

$$\left[A (\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{q E_0}{m} \right] \cos \omega t = 0 \quad \text{ή} \quad$$

Άρα $A = \frac{q E_0}{m (\omega_0^2 - \omega^2)}$ και $\boxed{z(t) = \frac{q E_0 \cos \omega t}{m (\omega_0^2 - \omega^2)}} \quad (3)$

b) Επεγκέν διπολικής ποσής στην πρόβλημα

(5)

$$P = n q Z(t) \quad (4) \quad \text{και} \quad P = x E \quad (5)$$

n : αριθμός μεταφορών ανά πλούσια οχηματα

$Z(t)$: μετατροπή μεταφορών είσοδος σε θέση εργασίας

x : συγκεκρινή επιδιεύνεση

$$x = \frac{P}{E} = \frac{n q Z}{E} = \frac{n q (q E_0 \cos \omega t)}{E m (\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{n q^2}{m (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

και

$X_r = x/\xi_0 = \frac{n e^2}{m (\omega_0^2 - \omega^2)}$

X_r : σχετική σημείωση
της έκδοσης εργασίας

d) $\varepsilon = \varepsilon_0 + x = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 X_r = \varepsilon_0 (1 + X_r)$

$$\eta^2 = \varepsilon_r \mu_r \quad (\mu_r = 1) = \varepsilon / \varepsilon_0 = (1 + X_r) = 1 + \frac{n e^2}{m (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

n : ο δικτυούς συντονισμός σε συγκεκρινή

d) Βάσει της καρ. 9 των Ρεν, πλέον 9.9 (Τόμος II)

Πρόβλημα 2.10

Λύστε το πρόβλημα 2.9 για την περίπτωση ενός ταλαντωνόμενου ηλεκτρονίου με απόσβεση, παίρνοντας τη μετατόπιση x ως τη συνιστώσα που παριστάνεται από την καμπύλη (a) του Σχ. 2.9 και δείξτε ότι

$$\epsilon_r = 1 + \chi = 1 + \frac{n e^2 m (\omega_0^2 - \omega^2)}{\epsilon_0 [m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 r^2]}$$

Στην πραγματικότητα το Σχ. 2.9(a) δείχνει το $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$. Σημειώστε ότι για

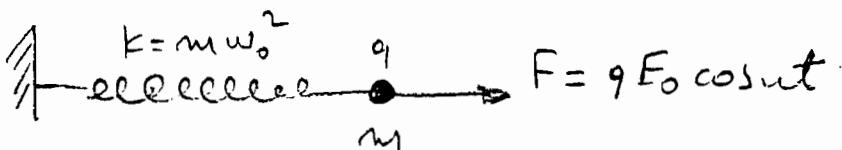
$$\omega \ll \omega_0, \quad \epsilon_r \approx 1 + \frac{n e^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2}$$

και για

$$\omega \gg \omega_0, \quad \epsilon_r \approx 1 - \frac{n e^2}{\epsilon_0 m \omega^2}$$

ΛΥΣΗ

a) Πρότυπο κίνησης προς ηλιτρονίου σε ευχέλιτρο
ήσος την επιδρούσαν προς ηλιτρούς φορέα $E = E_0 \cos \omega t$



Εξ. κίνησης: $\ddot{z} + \frac{r}{m} \dot{z} + \omega_0^2 z = q E_0 \cos \omega t \quad (1)$ γιατί $r = \text{const}$

$z = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (2)$ κύρια για Σχ. 2.62, 2.63 και
2.64 ταύτα

$$\text{θώρ} \quad A = \frac{F_0 \omega r}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 r^2} \quad \text{και} \quad B = \frac{F_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 r^2} \quad (3)$$

Για $r = \text{const}$ και $\omega \neq \omega_0$, $A \ll B$ (4)

$$n^2 = r \ddot{z} + 1 + x_r = 1 + \frac{P}{\epsilon_0 E} = 1 + \frac{n q^2}{\epsilon_0 E} =$$

$$= 1 + \frac{n q}{\epsilon_0 E} \times \frac{q E_0 m (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t}{[m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 r^2]}.$$

$$\text{Άρα} \quad n^2 = 1 + x_r = 1 + \frac{n e^2 m (\omega_0^2 - \omega^2)}{\epsilon_0 [m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 r^2]} \quad (5)$$

(6)

B) Fix $\omega \ll \omega_0$,

$$\eta^2 = \epsilon_r = 1 + \frac{n e^2 m \omega_0^2}{\epsilon_0 [m^2 \omega_0^4]} = 1 + \frac{n e^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2}$$

For $\omega \gg \omega_0$,

$$\eta^2 = \epsilon_r \approx 1 + \frac{n e^2 m (-\omega^2)}{\epsilon_0 [m^2 (-\omega)^2 + \omega_r^2]} \approx 1 - \frac{n e^2 m \omega^2}{\epsilon_0 m^2 \omega^4 + \omega_r^2} \quad (\text{rakeis})$$

$$\text{and } \eta^2 \approx \epsilon_r = 1 - \frac{n e^2}{\epsilon_0 m \omega^2}$$

ΤΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η δύναμη προστίθεται στην ρύθμιση της αποστήλωσης (4). Συγκεκρινά στη περιπτώση ότι η προστίθετη δύναμη είναι "μηδενί", τότε η φύση της φόρτου ή πίεσης Ρ θα γίνεται

$$P = nq E(t) = nq (A \sin \omega t + B \cos \omega t) = \frac{nq}{E_0} A E(\omega t - \pi/2) +$$

$$\frac{nq}{E_0} B E(\omega t) = X_A E(\omega t - \pi/2) + X_B E(\omega t) \quad \text{και οχι } P = X E$$

Η πόλωση Ρ θα είχε την ίδια σειρά ως η φόρτος Ε (πλέον όμως οφείλεται να έχει σταθερή φάση 90° ως ωπός της Ε (οφείλεται να έχει φάση 90° ως ωπός της Ε)). Επρόκειται να πληρώνεται η ίδια φόρτος Ε (ως προϊόν της προστίθετης δύναμης), $E(\omega t - \pi/2)$ και της αντίστοιχης ωπούσης.

Ενας τοπικός ισχώσας γίνεται να απλοποιήσει την πράξη είναι η χρησιμοποίηση μηδενικής αναπρεστήσεως της μηδενικής (βλέπε Βαρ Τόπος 3, Συγχρηματική Θέματα, παρ 9).

Το X ή Singampini επιστρέφεται οι γραμμές $X = X_B + i X_A$ - - -

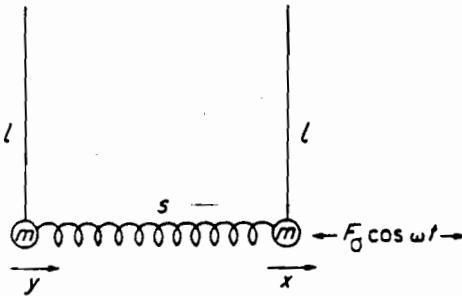
Πρόβλημα 3.10

Το δεξιό εκκρεμές του συζευγμένου συστήματος του σχήματος διεγίρεται από μιά οριζόντια δύναμη $F_0 \cos \omega t$. Αν συμπεριληφθεί και μια μικρή σταθερά απόσβεσης r , οι εξισώσεις της κίνησης είναι

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{l}x - r\dot{x} - s(x-y) + F_0 \cos \omega t$$

και

$$m\ddot{y} = -\frac{mg}{l}y - r\dot{y} + s(x-y)$$



Δείξτε ότι οι εξισώσεις της κίνησης για τις κανονικές συντεταγμένες $X=x+y$ και $Y=x-y$ είναι οι εξισώσεις ταλαντωτών με απόσβεση που διεγίρονται από μια δύναμη $F_0 \cos \omega t$.

Λύστε αυτές τις εξισώσεις για X και Y και, αγνοώντας την επίδραση του r , δείξτε ότι

$$x = \frac{F_0}{2m} \cos \omega t \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right]$$

και

$$y = \frac{F_0}{2m} \cos \omega t \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right]$$

όπου

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} \quad \text{και} \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2s}{m}$$

Δείξτε ότι

$$\frac{y}{x} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\omega^2}$$

και σχεδιάστε την απόκριση του ταλαντωτή συναρτήσει της συχνότητας για να δείξετε ότι έξω από την περιοχή συχνοτήτων μεταξύ ω_1 και ω_2 η κίνηση του y υφίσταται εξασθένηση.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \text{Εγ. Κίνησης: } m\ddot{x} &= -\frac{mg}{l}x - r\dot{x} - s(x-y) + F_0 \cos \omega t \\ m\ddot{y} &= -\frac{mg}{l}y - r\dot{y} + s(x-y) \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Προσθίτοντας τις (1)} &\rightarrow (\ddot{x} + \ddot{y}) + \frac{r}{m}(\dot{x} + \dot{y}) + \frac{g}{l}(x+y) = F_0 \cos \omega t \\ \text{αλλιστας τις (1)} &\rightarrow (\ddot{x} - \ddot{y}) + \frac{r}{m}(\dot{x} - \dot{y}) + \left(\frac{g}{l} + \frac{2s}{m} \right)(x-y) = F_0 \cos \omega t \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (2)$$

κανονικές συντεταγμένες $\bar{X} = x+y$ και $\bar{Y} = x-y$

$$(2) \Rightarrow \left. \begin{aligned} \ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \omega_1^2 x &= (F_0/m) \cos \omega t \\ \ddot{y} + \frac{r}{m} \dot{y} + \omega_2^2 y &= (F_0/m) \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ουαν $\omega_1^2 = g/l$ και $\omega_2^2 = g/l + 2S/m$ $\omega_1 < \omega_2$

Η γενική λύση των προβλημάτων της μορφής (3) στην
μόνιμη κατάσταση είναι:

$$\Psi = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad \text{ουαν} \quad \left. \begin{array}{l} \text{κίνηση fig: 2.62,} \\ 2.63, 2.64 \text{ και πάιν} \end{array} \right\}$$

$$A = \frac{F_0 \omega r}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 r^2} \quad \text{και} \quad B = \frac{F_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 r^2}$$

$$\text{για } r \rightarrow 0 \quad A = 0 \quad \text{και} \quad B = \frac{F_0}{m (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

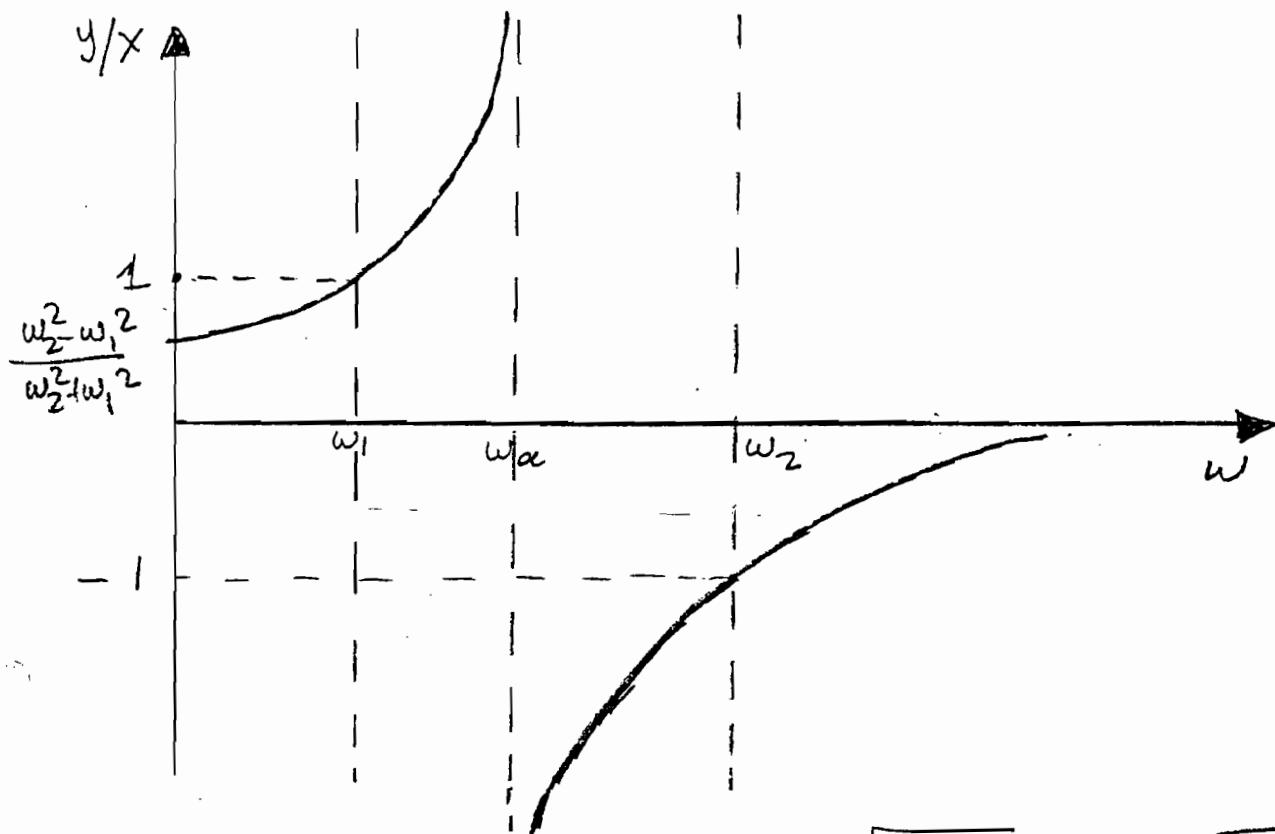
Από αι αύριας την fig. (3) στην μόνιμη κατάσταση, και
διχούντας την τριθέτη είναι:

$$X \approx \frac{F_0}{m (\omega_1^2 - \omega^2)} \cos \omega t \quad \text{και} \quad Y \approx \frac{F_0}{m (\omega_2^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

$$x = \frac{X + Y}{2} = \frac{F_0}{2m} \left(\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \cos \omega t$$

$$y = \frac{X - Y}{2} = \frac{F_0}{2m} \left(\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \cos \omega t$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2}}{\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2}} = \frac{\omega_2^2 - \omega^2 - \omega_1^2 + \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2 + \omega_1^2 - \omega^2} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\omega^2}$$



$$1) \frac{y}{x} \rightarrow \pm \infty \quad \text{für } \omega = \omega_\alpha = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}} = \omega_1 \sqrt{\frac{1 + (\omega_2/\omega_1)^2}{2}} = \omega_2 \sqrt{\frac{1 + (\omega_1/\omega_2)^2}{2}}$$

Schnittpunkte für $\omega_1 < \omega_\alpha < \omega_2$

$$2) \text{ für } \omega = 0 \quad \frac{y}{x} = (\omega_2^2 - \omega_1^2) / (\omega_2^2 + \omega_1^2)$$

$$3) \frac{y}{x} = 1 \rightarrow \omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\omega^2 = \omega_2^2 - \omega_1^2 \Rightarrow 2\omega^2 = 2\omega_1^2 \Rightarrow \omega = \omega_1$$

$$\frac{y}{x} = -1 \rightarrow -\omega_2^2 - \omega_1^2 + 2\omega^2 = \omega_2^2 - \omega_1^2 \Rightarrow 2\omega^2 = 2\omega_2^2 \Rightarrow \omega = \omega_2$$

$$|\frac{y}{x}| < 1 \quad \text{für } \omega < \omega_1 \text{ und } \omega > \omega_2$$

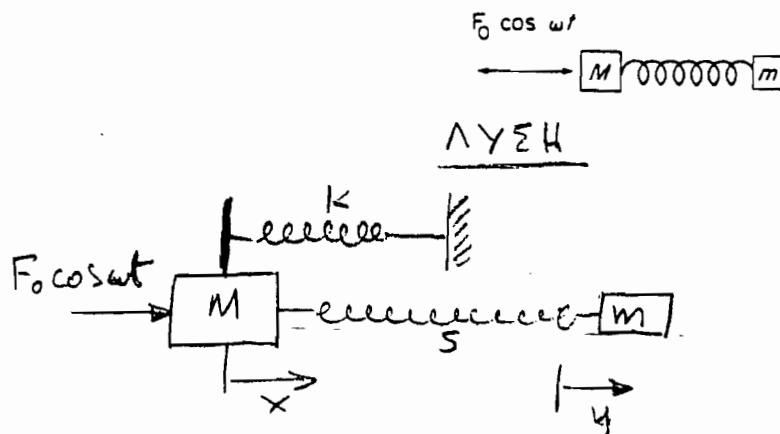
für ω zwischen ω_1 und ω_2 gilt $y < x$

ω außerhalb dieses Bereiches $\omega_1 < \omega < \omega_2$

Πρόβλημα 3.11

(3)

Το σχήμα δείχνει μια περιοδική δύναμη $F_0 \cos \omega t$ που δρα πάνω σε μια μάζα M η οποία αποτελεί μέρος ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή με δυσκαμψία s και η οποία συνδέεται με μια μάζα m μέσω ενός ελατηρίου με σταθερά s . Αν όλες οι ταλαντώσεις γίνονται κατά μήκος του άξονα των x , δείξτε ότι η συνθήκη για να παραμένει η M ακίνητη είναι $\omega^2 = s/m$. (Αυτή είναι μια απλή εκδοχή της αρχής της απόσβεσης ανεπιθύμητων ταλαντώσεων με τη χρήση μικρής μάζας).



$$\begin{aligned} \text{Eqs. kίνησης: } & M \ddot{x} = -kx - s(x-y) + F_0 \cos \omega t \\ & m \ddot{y} = s(x-y) \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (1)$$

Για αυτην μέτρα $M \rightarrow x=x_0 = \sigma \tau \omega t$ και $\dot{x}=0, \ddot{x}=0$

$$\begin{aligned} \text{Οι eq.(1) γίνονται } & 0 = -kx_0 - s(x_0 - y) + F_0 \cos \omega t \\ & m \ddot{y} = s(x_0 - y) \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (2)$$

Παίρνω τη δεύτερη ωρίγχτη της 2οι:

$$0 = s \ddot{y} - \omega^2 F_0 \cos \omega t \Rightarrow \boxed{\ddot{y} = \frac{\omega^2 F_0 \cos \omega t}{s}} \quad (3)$$

αντιστοιχία στη 2ο $\frac{m \ddot{y}}{s} = s(x_0 - y) \rightarrow$

$$\boxed{y = x_0 - \frac{m \omega^2}{s^2} F_0 \cos \omega t} \quad (4) \text{ και αντιστοιχία στη 2ο}$$

$$\langle x_0 = -s(x_0 - \underbrace{x_0 + \frac{m \omega^2}{s^2} F_0 \cos \omega t}_{(4)}) + F_0 \cos \omega t = F_0 \left(1 - \frac{m \omega^2}{s}\right) \cos \omega t$$

$$\text{Αρ &} \boxed{kx_0 = F_0 \left(1 - \frac{m \omega^2}{s}\right) \cos \omega t \neq 0}$$

$$\text{δοκιτώ το } x_0 = 0 \rightarrow 1 - \frac{m \omega^2}{s} = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0 = \sqrt{s/m}$$

$$\text{Λύσεις: } x = ? \text{ και } \ddot{y} = -\frac{F_0}{s} \cos \omega t$$

B. ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΟΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Να παραδίδονται 2-3 ασκήσεις ανά εβδομάδα)

6) Ενα μακρύ ευθύγραμμο φράγμα, μήκους $L=2\text{km}$, είναι κατασκευασμένο από ομογενές υλικό και έχει σταθερή διατομή. Είναι θεμελειωμένο σε δύο συμπαγείς θραχώδεις μάζες A, B και δεχόμαστε ότι προσομοιάζει με μια ομογενή, τελείωση ελαστική χορδή.

(a) Ποια είναι η πιο γενική μορφή στάσιμου κύματος που μπορεί να αναπτυχθεί στο φράγμα; (b) Υποθέτοντας ότι τα άκρα A και B του φράγματος παραμένουν πάντα ακλόνητα, υπολογίστε (σε km) τα επιτρεπόμενα μήκη κύματος των στάσιμων κυμάτων που αναπτύσσονται στο φράγμα. (γ) Με τη θοήθεια κατάλληλων πινάκων, θρίσκουμε ότι η ταχύτητα διάδοσης εγκάρσιων κυμάτων στο φράγμα είναι 500ms^{-1} . Ποιες είναι οι επιτρεπόμενες συχνότητες (σε Hz) εγκάρσιας ταλάντωσης του φράγματος;



7) Το ηλεκτρόνιο ενός ατόμου H περιγράφεται με τη θοήθεια ενός υλικού κύματος κατά de Broglie, που έχει μήκος κύματος $\lambda=h/p$ (p είναι η ορμή του ηλεκτρονίου και h η σταθερά του Planck). Δείξτε ότι η συνθήκη σχηματισμού "στάσιμων υλικών κυμάτων" μέσα στο άτομο H ισοδυναμεί με τη συνθήκη κβάντωσης $L=n\hbar$ του Bohr! (L είναι η στροφορμή του ηλεκτρονίου, ο ο ορμή είναι ακέραιος και $\hbar=h/2\pi$. Επομένως, δείξτε ότι το ηλεκτρόνιο του ατόμου H μπορεί να θρεθεί μόνο σε ορισμένες "επιτρεπόμενες κβαντικές "τροχιές", με ακτίνες $r_n=n^2\hbar^2/m\epsilon^2$ (m, ϵ είναι η μάζα και το φορτίο του ηλεκτρονίου)).



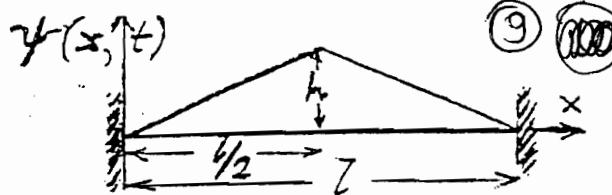
8) Χαλύθδινη γέφυρα μήκους 1 km προσομοιάζει με μη ιδανική χορδή της οποίας η σχέση διασποράς έχει τη μορφή $\omega = u_0 k + \frac{k^2}{2\pi}$

όπου $u_0=400\text{m/s}$. Αν η γέφυρα ήταν τέλεια ελαστική, θα είχαμε $u'=0$. Γενικά, η σταθερά u' εξαρτάται από την κατασκευή της γέφυρας. a) Δεχθείτε ότι τα άκρα A και B της γέφυρας είναι ακλόνητα και θρείτε (σε χιλιόμετρα) τα επιτρεπόμενα μήκη κύματος των εγκάρσιων στάσιμων κυμάτων που αναπτύσσονται στη γέφυρα. b) Με τη θοήθεια της δοσμένης σχέσης διασποράς, εκφράστε τις επιτρεπόμενες συχνότητες εγκάρσιας ταλάντωσης της γέφυρας σαν συναρτήσεις της σταθεράς u' .



9) Ομογενής χορδή γραμμικής πυκνότητας ρ_0 και μήκους l είναι στερεωμένη στα δυό της άκρα και τείνεται με δύναμη T_0 .

Απομακρύνουμε το μέσο της χορδής εγκάρσια κατά h και την αφήνουμε μετά ελεύθερη τη χρονική στιγμή $t=0$. Να θρευθούν τα πλάτη των κανονικών τρόπων ταλάντωσης που συμβάλλουν στην κίνηση της χορδής. (Υπόδειξη: αναπτύξτε κατά Fourier την $\psi(x,t)$ για $t=0$).



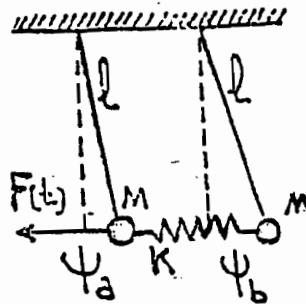
10) Εύκαμπτη χορδή μήκους L και γραμμικής πυκνότητας ρ έχει σταθερά άκρα και τείνεται με τάση T_0 . Η χορδή διεγείρεται από την ηρεμία χτυπώντας την στο μέσο με ένα σφυρί. Αν δεχτούμε ότι ακαριαία ένα μικρό μήκος a στο κέντρο της χορδής αποκτά αρχική ταχύτητα u_0 ($t=0$), να υπολογιστούν a) τα πλάτη των αρμονικών που συμβάλλουν στην κίνηση της χορδής και b) η ενέργεια του n -οστού τρόπου ταλάντωσης. γ) Αν $a=L/10$ να υπολογίσετε τον αριθμό n των αρμονικών που παίζουν αποφασιστικό ρόλο στην κίνηση της χορδής. δ) Δείξτε ότι ο αριθμός αυτός n είναι αντίστροφώς ανάλογος του a . (Υπόδειξη: Γράψτε την έκφραση για τη γενική κίνηση της χορδής για $t>0$ και εφαρμόστε τις αρχικές συνθήκες).

11) Βρείτε τους σχηματισμούς και τις συχνότητες των τριών πρώτων τρόπων εγκάρσιας ταλάντωσης μιας συνεχούς χορδής με τάση T_0 , πυκνότητα ρ και μήκος L , με την οριακή συνθήκη ότι και τα δύο άκρα είναι ελεύθερα (Τα άκρα είναι συνδεδεμένα με κρίκους που γλιστρούν χωρίς τριθή γύρω από δύο ράθδους). Δείξτε ότι ο χαμηλότερος τρόπος παρουσιάζει το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό να έχει άπειρο μήκος κύματος και συχνότητα μηδέν. Σε αυτόν τον τρόπο η χορδή μετατοπίζεται με ομοιόμορφη ταχύτητα.

12) Λύστε την άσκηση 1.26 του PAIN.

13) Ενας γραμμικός αρμονικός ταλαντωτής με μάζα m και "σταθερά ελατηρίου" k διεγείρεται σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις από την αρμονική δύναμη $F(t)=F_0 \cos \omega t$ (F_0, ω σταθερές). Δέχεται επίσης μια δύναμη αντίστασης ανάλογη της ταχύτητάς του, δηλ. $F_{ant}=-M\dot{x}$ (M σταθερά). Δείξτε ότι οι ταλαντώσεις μόνιμης κατάστασης που εκτελεί ο ταλαντωτής έχουν τη μορφή $x(t)=A_{a\pi}(t)\sin \omega t + A_{e\pi}(t)\cos \omega t$, προσδιορίστε τα πλάτη $A_{a\pi}(t)$, $A_{e\pi}(t)$ κι παραστήστε τα γραφικά σαν συναρτήσεις της συχνότητας ω της διεγείρουσας δύναμης. Βρείτε επίσης τη μέση χρονική τιμή της ισχύος που απορροφάει αυτός ο ταλαντωτής [$\langle P \rangle = 1/2 \omega F_0 A_{a\pi}(t)$].

14) Στό σύστημα των δύο συζευγμένων εκκρεμών του σχήματος, θεωρούμε το εκκρεμές a σαν "εξόδος" την οποία εφαρμόζεται η



αρμονική εξωτερική δυναμη $F(t)=F_0 \cos \omega t$. Το εκκρεμές a θεωρείται σαν "εξόδος", της οποίας μας ενδιαφέρει η σχετική απόκριση ψ_a/ψ_b . Αμελήστε την απόσθεση στην κίνηση των εκκρεμών και $\frac{\psi_b}{\psi_a} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega^2}$

δείξτε ότι: $\frac{\psi_b}{\psi_a} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega^2}$, δηλ. $\omega_1 < \omega_2$ είναι οι

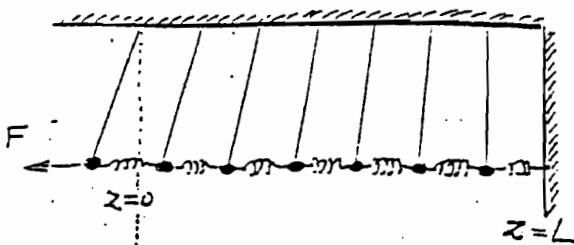
συχνότητες των δυο κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος των εκκρεμών. Σχεδιάστε την απόκριση ψ_a/ψ_b σαν συνάρτηση της συχνότητας ω της εξωτερικής δύναμης (θλ. και προθλ. 3.10 του PAIN).

16) Μια γραμμική διάταξη συζευγμένων εκκρεμών διαγείρεται στο $z=0$ με μια αρμονική δύναμη παράλληλη προς τη διάταξη και συχνότητας ω μικρότερης από την χαμηλή συχνότητα αποκοπής. Το σύστημα είναι στερεωμένο στο $z=L$ σε ένα ακλόνητο τοίχο.

Δεξιές ότι αν $\Psi(z,t) = A_0 \cos \omega t$ στο $z=0$, τότε $\Psi(z,t) = A(z) \cos \omega t$ με

$$A(z) = A_0 \frac{e^{-kz} - e^{-kL} e^{-k(L-z)}}{1 - e^{-2kL}}$$

όπου κ η σταθερά εξασθενήσεως του συστήματος. Σημειώστε ότι όταν $L \rightarrow \infty$ τότε $A(z) \rightarrow A_0 e^{-kz}$.



17) Υποθέστε ότι η ιονόσφατρα αρχίζει απότομα από ένα σύνορο στο οποίο η συχνότητα αποκοπής v_p για τις ταλαντώσεις πλάσματος αυξάνει απότομα από μηδέν σε 20 MHz . Υπολογίστε το μήκος εξασθενήσεως δ του πλάτους ραδιοφωνικών κυμάτων AM συχνότητας 1000 KHz . (Απάντηση: $\delta \approx 2,5 \text{ m}$, ανεξάρτητη της ν των AM αν $v \ll v_p$).

⊗ Διδεται: $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -\omega_0^2 \Psi + \frac{K \alpha^2}{m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}, \quad \omega_0^2 = g/e$

Οθου m : ή μέτρα των σημαρίδιων

α : ή απόσταση των σημαρίδιων στις παρέστατης ισορροπίαις

e : Το μήκος των ελεγκτικών

K : ή σταθερά των ελαστηρίων.