

Άσκηση 1 (Θεώρημα Darboux) Έστω c με $f'(a) < c < f'(b)$ τότε διαχρίνουμε τρείς περίπτωσεις:

1^η **Περίπτωση** $c < f_a(b) = f_b(a)$

Σε αυτη τη περίπτωση ισχύει ότι $f'(a) < c < f_a(b)$ και επειδή η συνάρτηση $f_a(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο $\xi_1 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f_a(\xi_1) = c$ δηλαδή

$$\frac{f(\xi_1) - f(a)}{\xi_1 - a} = c$$

όμως από το Θεώρημα μέσης τιμής ισχύει ότι για το διάστημα $[a, \xi_1]$ και την συνάρτηση $f(x)$ υπάρχει καποιο $\xi_2 \in (a, \xi_1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\xi_1) - f(a)}{\xi_1 - a} = c$$

2^η **Περίπτωση** $f_a(b) = f_b(a) < c$

Σε αυτη τη περίπτωση ισχύει ότι $f_b(a) < c < f'(b)$ και επειδή η συνάρτηση $f_b(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο $\xi_3 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f_b(\xi_3) = c$ δηλαδή

$$\frac{f(\xi_3) - f(b)}{\xi_3 - b} = c$$

όμως από το Θεώρημα μέσης τιμής ισχύει ότι για το διάστημα $[\xi_3, b]$ και την συνάρτηση $f(x)$ υπάρχει καποιο $\xi_4 \in (\xi_3, b)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_4) = \frac{f(b) - f(\xi_3)}{b - \xi_3} = c$$

3^η **Περίπτωση** $c = f_a(b) = f_b(a)$ Τότε ισχύει ότι

$$c = f_a(b) = f_b(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

και από το θεώρημα μέσης τιμής για την $f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$ ισχύει ότι υπάρχει ενα $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = c$$

Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει κάποιο $x \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x) = c$$

- **Άσκηση 2** Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για το (α') και (β') και με βάση την 'Άσκηση 1' το Θεώρημα Darboux για το (γ') .

(α') Από το ΘΜΤ για την $f(x)$ στο διάστημα $[0, 1]$ ισχύει ότι υπάρχει ένα ξ_1 το οποίο ανήκει στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$$

(β') Από το ΘΜΤ για την $f(x)$ στο διάστημα $[1, 2]$ ισχύει ότι υπάρχει ένα ξ_2 το οποίο ανήκει στο ανοικτό διάστημα $(1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{1 - 1}{2 - 1} = 0$$

(γ') Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) με $f'(\xi_1) = 0 \neq 1 = f'(\xi_2)$ όρα από το Θεώρημα Darboux υπάρχει $\xi_3 \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_3) = \frac{2}{3}$$

- **Άσκηση 3** Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι $f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής είτε για κάθε $x \in [a, b]$ $f(x) > 0$ είτε για κάθε $x \in [a, b]$ $f(x) < 0$. Ας υποθέσουμε ότι $f(x) > 0$ (παρόμοια θα δουλέψουμε και για την δεύτερη περίπτωση, $f(x) < 0$). Τότε ορίζεται η συνάρτηση $g : [a, b] \mapsto (0, +\infty)$ με τύπο

$$g(x) = \ln \circ f(x) = \ln(f(x))$$

η οποία είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) . Από το θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[a, b]$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

όμως

$$g'(\xi) = f'(\xi) \cdot \frac{1}{f(\xi)}$$

άρα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} &= \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{\ln f(b) - \ln f(a)}{b - a} \Rightarrow \\ (b - a) \cdot \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} &= \ln \left(\frac{f(b)}{f(a)} \right) \Rightarrow \\ e^{(b-a) \cdot \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}} &= e^{\ln \left(\frac{f(b)}{f(a)} \right)} \Rightarrow \\ \frac{f(b)}{f(a)} &= e^{(b-a) \cdot \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}} \end{aligned}$$

(1)

ΑΙΓΚΗΣΗ 4.

Έσω $g(x) = \arctan f(x)$, είναι γυμνός ότι

$$(arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{οπότε, } 10x \text{ θέλει ότι:}$$

$$g'(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{1+f^2(x)} = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

αν το f ουδέτερη ζεπουλεύει $\frac{f'(x_1)+f'(x_2)}{2} > 0$
 αφού $\frac{1'(x_1)}{1+f^2(x_1)} > -1$.

Αν $a < x_1 < b$ $10x \text{ θέλει } x_2 - x_1 < 0$.Επομένως $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ υπάρχει x_2 κοντά στο a και $a < x_2$, έτοιμος $f(x_2) > 0$ καθενίδια. $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$ υπάρχει $x_2 < b$ κοντά στο b .ως $f(x_2) < 0$ Επομένως $g(x) = \arctan f(x)$ έχει μία οριοφυήτο (a, b) και οικοδομείται πάνω το $(-\pi/2, \pi/2)$ 10x θέλει ότι $f(x_1) < \pi/2$ και $-\pi/2 < f(x_2)$ Με εγκαρκούσι το Ε.Π.Τ. γιατί $g(x)$ στο $[x_1, x_2]$
 έχει οριοφυή στη $\exists z \in (x_1, x_2)$ τιτοίστια ως είτε.

$$g'(\bar{x}) = \frac{\arctan f(x_2) - \arctan f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$

(2)

$$\frac{f'(z_1)}{1+f'(z_1)^2} = \frac{\operatorname{arctanh}(x_2) - \operatorname{arctanh}(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$(1 \Rightarrow) x_2 - x_1 < n \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{x_2 - x_1}$$

$$(2 \Rightarrow) g(x_2) - g(x_1) = \operatorname{arctanh}(x_2) - \operatorname{arctanh}(x_1)$$

$$\text{Kz } -\frac{n}{2} < g(x_2) \text{ Kzalog } g(x_1) < n/2 \Rightarrow$$

$$-\frac{n}{2} < g(x_2) < 0 \text{ Kzalog } -g(x_1) < 0 = 0$$

$$-n < g(x_2) - g(x_1) < 0$$

Aus (1) - (2) folgt:

$$\frac{f'(z_1)}{1+f'(z_1)^2} = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{g(x_2) - g(x_1)}{n} < -\frac{n}{n} = -1$$

$$\text{Zusammenfassung: } \frac{f'(z_1)}{1+f'(z_1)^2} < -1 \text{ ist wahr}$$

- Άσκηση 5 Από τις παρακάτω σχέσεις

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{x} \quad \text{και} \quad (1)$$

$$g'(x) = -\frac{f(x)}{x} \quad (2)$$

αν τις προσθέσουμε κατα μέλη έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f'(x) + g'(x) + (f(x) + g(x))x &= 0 \Rightarrow \\ ((f(x) + g(x))x)' &= 0 \Rightarrow \\ (f(x) + g(x))x &= c \Rightarrow \\ f(x)x &= c - g(x)x \Rightarrow \\ f(x) &= \frac{c}{x} - g(x) \end{aligned}$$

Αν αφαιρέσουμε κατα μέλη της (1) και (2) τότε έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f'(x) - g'(x) &= -\frac{g(x)}{x} + \frac{f(x)}{x} \Rightarrow \\ \frac{f'(x)}{x} - \frac{g'(x)}{x} + \frac{g(x)}{x^2} - \frac{f(x)}{x^2} &= 0 \Rightarrow \\ \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{g(x)}{x} \right)' &= 0 \Rightarrow \\ \frac{f(x)}{x} - \frac{g(x)}{x} &= b \Rightarrow \\ f(x) &= g(x) + bx \end{aligned}$$

Αφού έχουμε ότι

$$f(x) = g(x) + bx \quad \text{και} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{c}{x} - g(x) \quad (4)$$

Από 3 και 4 έχουμε ότι

$$f(x) = \left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{c}{2}\right) \cdot \frac{1}{x} = b'x + \frac{c'}{x} \quad \text{και} \quad (5)$$

$$g(x) = -\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{c}{2}\right) \cdot \frac{1}{x} = -b'x + \frac{c'}{x} \quad (6)$$

Aufgabe 6.

- Es sei eine stetige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert auf $D = (a, b)$.
 $|f'(x_0)| > M$ für alle $x \in D$.
 Zeigen Sie, dass es ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$ gilt:
 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- Da $|f'(x_0)| > M$, gilt für alle $x \neq x_0$:
 $|f(x) - f(x_0)| < \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \cdot |x - x_0| < M|x - x_0|$
- aus $|f'(x_0)| > M$ folgt $\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} > M > 0$ für alle $x \neq x_0$.
- aus $|f'(x_0)| < 0$ folgt $\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} < -M < 0$.
- Da $f'(x_0)$ ein reelles Zahl ist, gilt $\left| \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \right| > M \Leftrightarrow$
 $|f(x) - f(x_0)| > M|x - x_0|$ für alle $x \neq x_0$.

A2KUZH 7

$\forall x, t \in \mathbb{R}$ λεξίας οτι:

$$(I) \quad |f(x) - f(t)| \leq |x-t|^{1+\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

$$\text{αρα } \forall x, t \text{ λεξίας οτι: } \frac{|f(x) - f(t)|}{|x-t|} \leq |x-t|^{\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad (II)$$

Ανά την (I) είναι οτι f είναι συνεχής γιατί χ
στοιχ: εάν $\varepsilon > 0$ τότε για $\delta < (\varepsilon)^{1/\alpha}$ ισχύει
αν $|x-x_0| < \delta = 0$ $|x-x_0|^{1+\alpha} < \varepsilon =$, $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$.
και αντίστοιχα ανά την (II) προέπιπτε οτι, είναι
παραπομπή (σε αυτή τη περίπτωση θίλω $\delta < \varepsilon^{\alpha}$)

Ο μήνας είναι πολύ εύκολο να βρούμε την παραπέδη
της σε κάθε σημείο του μείον αριθμού της.

$$\text{Έστω } x_0 \in \mathbb{R} \text{ καν } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{τότε}$$

ανά την υπόθεση έχουμε οτι

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq |x - x_0|^{\alpha} \quad \Rightarrow$$

$$0 = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0|^{\alpha} = 0$$

οπού $f'(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_0) = c$ αριθμός.

- **Άσκηση 8** Από την υπόθεση της άσκησης έχουμε ότι

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = e^{f(x)-g(x)}$$

όμως αυτο συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = e^{f(x)-g(x)} &\Leftrightarrow \\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^{-g(x)}}{e^{-f(x)}} &\Leftrightarrow \\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad f'(x)e^{-f(x)} = g'(x)e^{-g(x)} &\Leftrightarrow \\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad -f'(x)e^{-f(x)} = -g'(x)e^{-g(x)} &\Leftrightarrow \\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \left(e^{-f(x)}\right)' = \left(e^{-g(x)}\right)' &\Leftrightarrow \\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad e^{-f(x)} = e^{-g(x)} + c' & \end{aligned}$$

Από την υπόθεση της άσκησης έχουμε ότι $f(0) = g(2011) = 1$ άρα από την τελευταία σχέση έχουμε ότι:

$$e^{-1} = e^{-g(0)} + c' \tag{7}$$

και

$$e^{-f(2011)} = e^{-1} + c' \tag{8}$$

αριθμώντας τις 7 και 8 κατα μέλη παίρνουμε ότι

$$e^{-f(2011)} - 2e^{-1} = -e^{-g(0)} \tag{9}$$

άρα από την 9 συμπαιρένουμε ότι

$$e^{-f(2011)} - 2e^{-1} < 0$$

κάνοντας στοιχειώδεις υπολογισμούς

$$\begin{aligned} e^{-f(2011)} - 2e^{-1} < 0 &\Leftrightarrow \\ e^{-f(2011)} < 2e^{-1} &\Leftrightarrow \\ \left(\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-f(2011)} < e^{-1} &\Leftrightarrow \\ e^{\ln(\frac{1}{2})} \cdot e^{-f(2011)} < e^{-1} &\Leftrightarrow \\ e^{\ln(\frac{1}{2}) - f(2011)} < e^{-1} &\Leftrightarrow \\ \ln\left(\frac{1}{2}\right) - f(2011) < -1 &\Leftrightarrow \\ f(2011) > \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 1 & \end{aligned}$$

-ΑΙΧΗΣΗ

5

(i) Τις νερπίνων $f(1/2) > 0$ τότε θεωρούμε το κάθιστα

διάστημα $[3/4, 1]$ και είσω $x \in [3/4, 1]$ τότε

$$x - 1/2 \geq \frac{1}{4}$$

ανά το Ε.Δ.Τ. για τους δεξιούς στο διάστημα $[1/2, x]$ για το $x > 3/4$

$$\text{Έχουμε ότι} \quad \frac{f(x) - f(1/2)}{x - 1/2} = f'(z_1) \text{ με } z_1 \in (1/2, x)$$

Επειδή $x - 1/2 \geq \frac{1}{4}$ είναι θετικό =, $\frac{f(x) - f(1/2)}{x - 1/2} = f'(z_1)$ είναι γνοιώς αύξουσα
και $f(x) > f(1/2) \geq 0$ αρα έχουμε:

$$f(x) - f(1/2) = (x - 1/2) f'(z_1)$$

$$\text{Επειδή } x \geq 3/4 \Rightarrow x - 1/2 \geq 1/4 \text{ αρα}$$

$$f(x) - f(1/2) \geq \frac{1}{4} f'(z_1) \geq \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{4} + f(1/2) \text{ για } x \in [3/4, 1]$$

αρα $I = [3/4, 1]$.

(ii) Τις νερπίνων $f(1/2) \leq 0$ τότε θεωρούμε το κάθιστα

διάστημα $[0, 1/4]$ και εξαγοράζουμε οπως πριν

για $x \in [0, 1/4]$ θα είσω

$$\frac{f(x) - f(1/2)}{x - 1/2} = f'(z_2) \quad z_2 \in [0, 1/4]$$

$$\Rightarrow f(x) - f(1/2) = (x - 1/2) f'(z_2) = 0$$

$$-f(x) = -f(1/2) + (1/2 - x) f'(z_2)$$

$$\Rightarrow -f(x) \geq \frac{1}{4} \quad \text{με } -f(x) \text{ θετικό αρα}$$

$$|f(x)| \geq \frac{1}{4}.$$

$$\textcircled{1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x^{n+1}}{\arccos x^n}$$

Είναι γνωστό ότι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \arccos x = 0$ από το άριθμό

Είναι απεροδιόριστο σημείο $\frac{0}{0}$. Η $\arccos x^n$

πλέον είναι προσαρμοστικής των κανόνων De L'Hopital

$$\text{Έχουμε } (\arccos x^n)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} \quad (|x| < 1)$$

$$\text{Επειδή } n > 1 \quad (\arccos x^n)' = -n \cdot x^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} =$$

$$= \frac{-n \cdot x^{n-1}}{\sqrt{1-x^{2n}}} \quad , \text{ από}$$

$$\frac{(\arccos x^{n+1})'}{(\arccos x^n)'} = \frac{\frac{-(n+1)x^n}{\sqrt{1-x^{2n+2}}}}{\frac{-nx^{n-1}}{\sqrt{1-x^{2n}}}} = \frac{(n+1) \cdot x^n \cdot (1-x^{2n})^{1/2}}{n \cdot x^{n-2} \cdot (1-x^{2n+2})^{1/2}} =$$

$$= \frac{(n+1)}{n} \cdot x \cdot \left(\frac{1-(x^2)^n}{1-(x^2)^{n+1}} \right)^{1/2} = \left(\frac{n+1}{n} \right) \cdot x \cdot \left(\frac{(1-x^2)(x^{2n+2} + \dots + 1)}{(1-x^2)(x^{2n} + \dots + 1)} \right)^{1/2}$$

$$\text{οπού} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\arccos x^{n+1})'}{(\arccos x^n)'} = \left(\frac{n+1}{n} \right) \cdot 1 \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

7

Kan ein Sii

$$\frac{\arccos x^n}{\arccos x} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\arccos x^{k+1}}{\arccos x^k} = u$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x^n}{\arccos x} = \prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{n}.$$