

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

23 Ιανουαρίου 2006

Απαντήστε και στα τέσσερα, ισοδύναμα θέματα. Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες.

ΘΕΜΑ 1ο

- α) Εστω a, b στοιχεία μιας ομάδας (G, \cdot) . Δείξτε ότι υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $x \in G$, λύση της εξίσωσης $a \cdot x = b$. Εξηγήστε σε χάθε βήμα της απόδειξης ποιό αξίωμα του ορισμού της ομάδας χρησιμοποιήσατε.
- β) Συμπληρώστε τον κάτωθι πίνακα πολλαπλασιασμού μιας ομάδας $G = \{1, a, b, c\}$ με ουδέτερο στοιχείο το 1. Πώς χρησιμοποιείται το ερώτημα α) στην συμπλήρωση του πίνακα;

.	1	a	b	c
1				
a				
b				
c				

Υπόδειξη: Διαχρίνετε τις περιπτώσεις: (i) Κάποιο στοιχείο, έστω το a , έχει τάξη 2, και (ii) κανένα στοιχείο της G δεν έχει τάξη 2.

γ) Οι διαφορετικές δομές ομάδων που βρήκατε, με ποιές γνωστές ομάδες είναι ισομορφικές;

δ) Πόσες διαφορετικές δομές ομάδων υπάρχουν τάξης 5; Δικαιολογήστε! *Λογική*

ε) Δώστε όλες τις μη ισομορφικές Πεπερασμένα Παραγόμενες Αβελιανές Ομάδες τάξης 200.

στ) Κατατάξτε τις ομάδες-πηλίκα $\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\langle (3,3) \rangle}$ και $\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{3\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}}$ σύμφωνα με την Ταξινόμηση των ΠΠΑΟ. (Χρησιμοποιείστε ότι $\langle (3,3) \rangle \cong 3\mathbb{Z} \times \{0\}$.)

ΘΕΜΑ 2ο

Εστω $(\mathbb{R}, +)$ η προσθετική ομάδα των πραγματικών και \mathbb{Z} η υποομάδα των ακεραίων.

α) Δείξτε ότι το σύνολο όλων των συμπλόκων της \mathbb{Z} στην \mathbb{R} είναι

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{t + \mathbb{Z} \mid 0 \leq t < 1\},$$

και δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία ενός συμπλόκου $t + \mathbb{Z}$.

β) Εστω U η πολλαπλασιαστική ομάδα $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Δείξτε ότι η ομάδα-πηλίκο \mathbb{R}/\mathbb{Z} είναι ισομορφική με την U .

γ) Εστω $U_n = \langle z_n = e^{i\frac{2\pi}{n}} \rangle = \{z_n^k \mid k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$, η κυκλική υποομάδα των n -στών ριζών της μονάδας. Δείξτε ότι δεν υπάρχει μη τετριψμένος ομομορφισμός από την ομάδα U_4 στην ομάδα U_7 .

δ) Δώστε ένα παράδειγμα ομάδας με άπειρη τάξη, της οποίας όλα τα στοιχεία να έχουν πεπερασμένη τάξη.

ε) Δείξτε ότι $U/U_n = \{e^{i\theta} U_n \mid 0 \leq \theta < \frac{2\pi}{n}\}$. Περιγράψτε γεωμετρικά ένα σύμπλοκο $e^{i\theta} U_n$.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Εστω τα στοιχεία της ομάδας μεταθέσεων S_9 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 & 9 & 8 \end{pmatrix} \text{ και } \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε την $\sigma^{-1}\rho$. Αναλύστε την σ σε γινόμενο ζένων χύκλων και σε γινόμενο αντιμεταθέσεων. Ποιά είναι η τάξη της σ ;

β) Δώστε ένα στοιχείο της S_9 τάξης 20.

γ) Δείξτε ότι δεν υπάρχει στοιχείο της S_9 τάξης 18.

δ) Βρείτε την εναλλάσσουσα υποομάδα A_3 , καθώς και το κέντρο $Z(S_3)$ της S_3 .

ε) Είναι η A_3 και η $Z(S_3)$ κανονικές υποομάδες; Γιατί;

ΘΕΜΑ 4ο

α) Εστω $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ο δακτύλιος των ακεραίων modulo n , με πράξεις την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό modulo n , και έστω $m \in \mathbb{Z}_n$. Δείξτε ότι ο m είναι διαιρέτης του μηδενός αν και μόνον αν $(m, n) = d \neq 1$.

β) Εστω $G_n = \{1, a_1, \dots, a_r\}$ το σύνολο των μη μηδενικών στοιχείων του \mathbb{Z}_n που δεν είναι διαιρέτες του 0, εφοδιασμένο με τον πολλαπλασιασμό modulo n . Δείξτε ότι το G_n είναι κλειστό ως προς την πράξη αυτή. Δείξτε ότι για $a \in G_n$, τα στοιχεία $a, 1, aa, \dots, a^r$ είναι όλα διαφορετικά, και στη συνέχεια ότι (G_n, \cdot) ομάδα.

γ) Εστω $\phi(n)$ το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι του n και πρώτοι προς τον n . Αν $a \in \mathbb{Z}$ με $(a, n) = 1$, δείξτε ότι $a^{\phi(n)} - 1$ διαιρείται με τον n , δηλαδή $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

δ) Δείξτε ότι ο $2^{11 \cdot 213} - 1$ δεν διαιρείται με τον 11.

Καλή επιτυχία!

Σ. Λαζαρόπούλου