

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

17 Ιανουαρίου 2005

Απαντήστε και στα τέσσερα θέματα. Ολα τα θέματα είναι ισοδύναμα.

ΘΕΜΑ 1ο

I) Δώστε παράδειγμα ομάδας G τέτοιας ώστε:

- α) να περιέχει κυκλική υποομάδα τάξης n αν $|G| = 2n$.
- β) να περιέχει μη αβελιανή υποομάδα τάξης n αν $|G| = 2n$.
- γ) να περιέχει υποομάδα τάξης d για κάθε d διαιρέτη της τάξης $|G| = n$.
- δ) όλες οι υποομάδες της G να είναι κανονικές ενώ G όχι αβελιανή.

II)

- α) Υπάρχει μη τετριμμένος ομομορφισμός από την ομάδα Z_7 στην ομάδα Z_4 ;
- β) Υπάρχει μη τετριμμένος ομομορφισμός από την ομάδα S_4 στην ομάδα S_3 ;
- γ) Δείξτε ότι ενώ $Z, 3Z$ είναι ισομορφικά ως ομάδες δεν είναι ισομορφικά ως διακτύλιοι.

ΘΕΜΑ 2ο

Το κέντρο μιας ομάδας G , συμβολίζουμε $Z(G)$, είναι το σύνολο όλων των στοιχείων $a \in G$ με την ιδιότητα: $ax = xa \quad \forall x \in G$.

- α) Δείξτε ότι $Z(G) \triangleleft G$. (Δείξτε πρώτα ότι $Z(G) \leq G$.)
- β) Δείξτε ότι αν $G/Z(G)$ είναι κυκλική, τότε η G είναι αβελιανή.
- γ) Δείξτε ότι ο δείκτης $[G : Z(G)]$ δεν είναι ποτέ πρώτος αριθμός.
- δ) Βρείτε το κέντρο της ομάδας D_4 .

ΘΕΜΑ 3ο

α) Δεδομένου ότι τα στοιχεία της ομάδας $Z \times Z$ αντιστοιχούν στα σημεία του χαρτεσιανού επιπέδου με ακέραιες συντ/νες, περιγράψτε γεωμετρικά τις υποομάδες $\langle (3,3) \rangle$ και $3Z \times 3Z$ της ομάδας $Z \times Z$.

β) Κατατάξτε τις ομάδες-πηλίκα $\frac{Z \times Z}{\langle (3,3) \rangle}$ και $\frac{Z \times Z}{3Z \times 3Z}$ σύμφωνα με την ταξινόμηση των πεπερασμένα παραγόμενων αβελιανών ομάδων.

(Χρησιμοποιείστε ότι $\langle (3,3) \rangle \cong 3Z \times \{0\}$.)

γ) Σε κάθε μία από τις ομάδες-πηλίκα $\frac{Z \times Z}{\langle (3,3) \rangle}$ και $\frac{Z \times Z}{3Z \times 3Z}$ δώστε το σύμπλοκο του στοιχείου $(1,2)$ και περιγράψτε το γεωμετρικά.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Εστω $(A, +, \cdot)$ και $(B, +, \cdot)$ δακτύλιοι. Δείξτε ότι το χαρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ εφοδιασμένο με τις κάτωθι πράξεις είναι επίσης δακτύλιος:

$$+ : (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$\cdot : (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2)$$

β) Εστω $(A, +, \cdot)$ ένας δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Δείξτε ότι το σύνολο A^* των αντιστρέψιμων στοιχείων του αποτελεί ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό.

γ) Εστω $(A, +, \cdot)$ και $(B, +, \cdot)$ δακτύλιοι με μοναδιαία στοιχεία. Δείξτε ότι ο δακτύλιος $(A \times B, +, \cdot)$ έχει μοναδιαίο στοιχείο και ισχύει $(A \times B)^* = A^* \times B^*$.

δ) Δείξτε ότι οι δακτύλιοι $(Z_m \times Z_n, +, \cdot)$ ($Z_{mn}, +, \cdot$) είναι ισομορφικοί αν και μόνον αν $(m, n) = 1$.

ε) Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του δακτυλίου Z_{15} .

(Υπόδειξη: $Z_{15} \cong Z_3 \times Z_5$.)

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

Σ. Λαμπροπούλου