

ΣΕΜΦΕ, ΕΞΕΤΑΣΗ, Εφαρμογές της Λογικής στην Πληροφορική ,
14/02/2005

~~ΖΗΤΗΜΑ 1.~~ (i) Στο λ-λογισμό (χωρίς τύπους) γράψτε ποιό όροι είναι redex και ποιό contractum. Ορίστε τι σημαίνει κανονικός όρος, κανονικοποιήσιμος και ισχυρά κανονικοποιήσιμος. Αναφέρετε ένα παράδειγμα όρου που είναι κανονικοποιήσιμος αλλά όχι ισχυρά κανονικοποιήσιμος.

(ii) Διατυπώστε το θεώρημα Church-Rosser. Με βάση το θεώρημα αυτό αποδείξτε ότι δύο όροι P και Q είναι β-ίσοι (δηλ. $P =_{\beta} Q$) τότε και μόνον εάν υπάρχει όρος N ώστε $P \rightarrow_{\beta} N$ και $Q \rightarrow_{\beta} N$.

~~ΖΗΤΗΜΑ 2.~~ Διατυπώστε το θεώρημα του σταθερού σημείου στο λ-λογισμό. Χρησιμοποιήστε το για να αποδείξετε ότι για κάθε όρο M υπάρχει F ώστε

$$F =_{\beta} M[f := F].$$

Χρησιμοποιήστε το παραπάνω για να δώσετε έναν ορισμό στο λ-λογισμό (ως σταθερό σημείο μιας σχέσης) της αναδρομικής συνάρτησης $\text{fact} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ η οποία ικανοποιεί το

$$\text{fact}(0) = 1$$

$$\text{fact}(n + 1) = \text{fact}(n) * n + 1$$

Μπορείτε να θεωρήσετε ως γνωστά ότι ο πολ/σμός $*$, το $\text{if} \dots \text{then} \dots \text{else}$, ο προηγούμενος $\text{pred}(n + 1) = n$ και ο έλεγχος του μηδενός zero αναπαρίστανται στο λ-λογισμό.

~~ΖΗΤΗΜΑ 3.~~ (i) Αποδείξτε ότι στο λ-λογισμό με απλούς τύπους à la Curry ισχύει η τυποποίηση $\vdash \lambda x \lambda y. x : \sigma \rightarrow ((\tau \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma)$.

Υπάρχει η τυποποίηση $\vdash \lambda x. x x : \sigma$ για κάποιο τύπο σ και γιατί;

(ii) Στο σύστημα φυσικής απαγωγής του προτασιακού λογισμού αποδείξτε τον προτασιακό τύπο $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ από την ανοικτή υπόθεση $A \rightarrow (B \rightarrow C)$. Γράψτε τον λ-όρο με τύπους που αντιστοιχεί μέσω του ισομορφισμού Curry-Howard στην απόδειξη αυτή.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. Καλή Επιτυχία!