

ΣΕΜΦΕ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
Επαναληπτική εξέταση στο μάθημα: ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ
Σεπτέμβριος 2005
Γράψτε και τα τέσσερα (ισοδύναμα) θέματα.
Διάρκεια: 2.5 ώρες.

Θέμα 1ο Εκκρεμές αποτελείται από (άμαζο) ελατήριο με σταθερά k και φυσικό μήκος L_0 , που το ένα άκρο του είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο, ενώ το άλλο άκρο του συνδέεται με μάζα m . Δηλαδή οι δυνάμεις που ασκούνται οφείλονται στο ελατήριο και στο πεδίο βαρύτητας. Θεωρούμε ότι η κίνηση περιορίζεται σ' ένα μόνο κατακόρυφο επίπεδο. (α) Να γράψετε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση χρησιμοποιώντας ως γενικευμένες συντεταγμένες την απόσταση r της μάζας από το σημείο εξάρτησης και τη γωνία θ που σχηματίζει το ελατήριο με την κατακόρυφο. (β) Να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν. (γ) Να βρείτε τη ψέση ισορροπίας (r_0, θ_0) .

Θέμα 2ο Θεωρήστε φερμιόνιο με φορτίο q και μάζα m που κινείται υπό την επίδραση ηλεκτρομαγνητικού πεδίου με $V = 0$ και $\vec{A} = (-By, 0, 0)$. Μπορεί κανείς να δείξει ότι η εξίσωση του Dirac για την κυματοσυνάρτηση $\psi = \begin{bmatrix} \phi \\ \chi \end{bmatrix}$ μπορεί να αναχθεί στη μορφή

$$\left[\sum_{k=x,y,z} \sigma_k \cdot (\hat{p}_k - qA_k) \right]^2 \phi = (E^2 - m^2)\phi$$

για τις “μεγάλες” συνιστώσες ϕ . Υπενθυμίζουμε ότι $\hat{p}_x = -i\frac{\partial}{\partial x}$, $\hat{p}_y = -i\frac{\partial}{\partial y}$, $\hat{p}_z = -i\frac{\partial}{\partial z}$ και ότι τα ϕ και χ είναι στήλες με δύο στοιχεία.

Δοκιμάστε τη λύση $\phi(x, y, z) = e^{ip_z x} e^{ip_z z} F(y)$ (το F είναι βέβαια στήλη με δύο στοιχεία), με την επί πλέον υπόθεση ότι $\sigma_z F = sF$, $s = \pm 1$ και επιβεβαιώστε ότι F ικανοποιεί την εξίσωση:

$$F'' - q^2 B^2 \tilde{y}^2 F = -(E^2 - m^2 - p_z^2 + sqB)F, \quad \tilde{y} \equiv y - y_0, \quad y_0 \equiv -\frac{p_x}{qB}.$$

Βασιζόμενοι στην αναλογία της εξίσωσης αυτής με την εξίσωση Schrödinger για τον αρμονικό ταλαντωτή:

$$\psi'' - m^2 \omega^2 \tilde{y}^2 \psi = -2m\epsilon\psi,$$

που έχει ιδιοτιμές ενέργειας $\epsilon = \omega(n + \frac{1}{2})$, δείξτε ότι

$$E^2 - m^2 - p_z^2 = qB(2n + 1) - sqB.$$

Τπενθύμιση: $\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z$.

Θέμα 3ο Έστω ότι το πεδίο Φ είναι μια δυάδα:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \Phi^\dagger = (\phi_1^* \quad \phi_2^*).$$

Θεωρήστε τη Λαγχρανζιανή πυκνότητα:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi^\dagger}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi^\dagger}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} m^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1^*}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_2^*}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1^*}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_2^*}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} m^2 (\phi_1^* \phi_1 + \phi_2^* \phi_2) - \lambda (\phi_1^* \phi_1 + \phi_2^* \phi_2)^2. \end{aligned}$$

(1) Να βρείτε την εξίσωση κίνησης του Φ . (2) Να αποδείξετε ότι η \mathcal{L} είναι αναλλοίωτη χάτω από τον μετασχηματισμό:

$$\Phi \rightarrow U\Phi, \quad \Phi^\dagger \rightarrow \Phi^\dagger U^\dagger, \quad U = \cos \chi + i \sin \chi (\sigma_1).$$

Το σ_1 είναι ένας πίνακας του Pauli: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Να προσδιοριστεί η διατηρούμενη ποσότητα που αντιστοιχεί στη συμμετρία αυτή.

Θέμα 4ο Ορίζουμε τις ποσότητες

$$S_i \equiv \frac{\hbar}{2} (b_+^\dagger b_-^\dagger) \sigma_i \begin{pmatrix} b_+ \\ b_- \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3,$$

όπου οι τελεστές $b_+^\dagger (b_+)$ δημιουργούν (χαταστρέφουν) μποζόνια κάποιου είδους και αντίστοιχα οι τελεστές $b_-^\dagger (b_-)$ δημιουργούν (χαταστρέφουν) μποζόνια διαφορετικού είδους από τα προηγούμενα. Τα σ_i είναι οι πίνακες του Pauli.

(α) Να γράψετε τις σχέσεις μετάθεσης των τελεστών. (β) Να αποδείξετε ότι $[S_1, S_2] = iS_3$. Υπενθύμιση: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!