

ΣΕΜΦΕ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
Εξέταση στο μάθημα: ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ
Ιούνιος 2005
Γράψτε και τα τέσσερα (ισοδύναμα) θέματα.
Διάρκεια: 2.5 ώρες.

Θέμα 1ο Θεωρήστε ένα απλό εκχρεμές, που δεν κινείται υποχρεωτικά σ' ένα επίπεδο, αλλά σε συντεταγμένες του υλικού σημείου μπορούν να εκφραστούν με το (σταθερό) μήκος l του νήματος, μια πολιχή γωνία θ και μια αζιμουθιακή γωνία ϕ με τις συνηθισμένες σχέσεις:

$$x = l \sin \theta \cos \phi, \quad y = l \sin \theta \sin \phi, \quad z = l \cos \theta.$$

Η αρχή των αξόνων βρίσκεται στο σημείο εξάρτησης (προσυγή: ο άξονας των z είναι προσανατολισμένος προς τα "κάτω"). (α) Να γράψετε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση και να συναγάγετε τις εξισώσεις κίνησης. (β) Έστω ότι το υλικό σημείο εκτελεί κίνηση κατά την οποία η γωνία θ δεν αλλάζει. Να υπολογιστεί αυτή, η γωνία συναρτήσει της στροφορμής περί το σημείο εξάρτησης. (γ) Οι εξισώσεις κίνησης είναι αναλογίωτες υπό τους μετασχηματισμούς: $\phi \rightarrow \phi + \phi_0$, $t \rightarrow t + t_0$. Να προσδιορίσετε τις αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες. Πουρί είναι το φυσικό τους νόημα; Υπενθύμιση: Για την περίπτωση της χρονικής μετάθεσης κατά ϵ ισχύει: $\delta L = \epsilon \frac{dL}{dt}$.

Θέμα 2ο Θεωρήστε την εξίσωση των Klein-Gordon σ' ένα δυναμικό με $\phi = V$ και $\vec{A} = (0, 0, 0)$. Θεωρήστε ότι

$$V = \begin{cases} 0, & r \leq R, \\ \infty, & r > R. \end{cases}$$

Να βρείτε τη σφαιρικά συμμετρική λύση. Υπενθύμιση:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right].$$

(Η αντικατάσταση $\Psi = \frac{\phi}{r}$ μπορεί να αποδειχθεί χρήσιμη για τη λύση της διαφορικής εξίσωσης. Μην επιχειρήσετε να υπολογίσετε τη σταθερά χανονικοποίησης της κυματοσυνάρτησης.)

Θέμα 3ο Ένα σωματίδιο σε μια διάσταση περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x, t=0) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

Να αναπτυχθεί η κυματοσυνάρτηση σε επίπεδα κύματα:

$$\psi(x, t) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} [a(k)u(k)e^{i(kx-\omega_k t)} + b(k)v(k)e^{i(kx+\omega_k t)}],$$

$$u(k) = \sqrt{\frac{\omega_k + m}{2\omega_k}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k}{\omega_k+m} \end{pmatrix}, \quad v(k) = \sqrt{\frac{\omega_k - m}{2\omega_k}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-k}{\omega_k-m} \end{pmatrix}, \quad \omega_k \equiv +\sqrt{k^2 + m^2}.$$

Ποια είναι η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα $f(x)$ και $g(x)$ (ή οι μετασχηματισμοί τους κατά Fourier $\hat{f}(k)$ και $\hat{g}(k)$) ώστε το ανάπτυγμα να περιλαμβάνει μόνο θετικές ενέργειες;

Θέμα 4ο Θεωρήστε τους φερμιονικούς τελεστές $a_+, a_-, a_+^\dagger, a_-^\dagger$, που αναφέρονται σε δύο καταστάσεις + και - ενός σωματιδίου. (α) Αν ορίσουμε νέους τελεστές

$$b_+ = ca_+ + sa_+^\dagger, \quad b_- = ca_- - sa_-^\dagger,$$

να βρεθούν οι συνθήκες επί των c και s , υπό τις οποίες τα b_+, b_- είναι επίσης φερμιονικοί τελεστές. (β) Αν το χενό $|A_0\rangle$ ορίστε με τις σχέσεις

$$a_+|A_0\rangle = 0, \quad a_-|A_0\rangle = 0,$$

ενώ το χενό $|B_0\rangle$ με τις σχέσεις

$$b_+|B_0\rangle = 0, \quad b_-|B_0\rangle = 0,$$

να αποδειχθεί ότι η παράσταση:

$$|B\rangle \equiv (c - sa_+^\dagger a_-^\dagger)|A_0\rangle$$

μηδενίζεται από τους τελεστές b_+ και b_- , δηλαδή ακριβώς η κατάσταση $|B_0\rangle$.