

# ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ, ΣΕΜΦΕ/ΕΜΠ

## «Νέες Τεχνολογίες στην εκπαίδευση» Εξετάσεις Ιουνίου 2005

Ν. Τράκας

Μπείτε στο σύστημα ως:

**Login:** labuser

αφήνοντας κενό το **Password**.

Στην επιφάνεια εργασίας (Desktop) θα βρείτε ένα φάκελο (directory) με το όνομα **EXETASEIS**. Κάντε διπλό κλικ για να μπείτε στον φάκελο αυτό.

Μέσα στο φάκελο EXETASEIS θα βρείτε:

**1.** Ένα φάκελο με το όνομα **IMAGES** όπου υπάρχουν όλες οι φωτογραφίες/σχήματα που εμφανίζονται στις φωτοτυπίες του κεφαλαίου που σας έχει δοθεί, μια εικόνα από το εξώφυλλο του αντίστοιχου βιβλίου, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως φόντο στις ιστοσελίδες σας, καθώς και άλλα χρήσιμα σχήματα. Προτείνεται η χρήση των εικόνων/σχημάτων στις ιστοσελίδες σας να γίνει από τον φάκελο **IMAGES** (με κατάλληλη αναγραφή του path) και να μην αντιγραφούν στον φάκελο που θα έχει τα αρχεία html.

**2.** Ένα φάκελο με το όνομα **EXET**. Κάντε δεξί κλικ στον φάκελο αυτό και αλλάξτε το όνομα του σε: **EXET-ΕΡΙΤΗΤΟ-ΟΝΟΜΑ**, όπου βέβαια για **ΕΡΙΤΗΤΟ-ΟΝΟΜΑ** θα γράψετε τα αντίστοιχα δικά σας.

**ΠΡΟΣΟΧΗ: Λατινικοί χαρακτήρες και ΟΧΙ ΚΕΝΑ!**

Σ' αυτό το φάκελο θα αποθηκεύσετε τα αρχεία που θα κατασκευάσετε.

**3.** 3 ακόμα αρχεία που χρειάζονται για την «παράδοση των γραπτών σας»: submit.bat , ncftpnt.exe και choice.exe, και

**4.** Το shoptcut αρχείο "**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ**" όπου μπορείτε να βρείτε τις σημειώσεις του μαθήματος.

### «ΠΑΡΑΔΟΣΗ ΓΡΑΠΤΩΝ»

Όταν θα είστε έτοιμοι να παραδώσετε την εργασία σας, θα κάνετε διπλό κλικ στο αρχείο **submit.bat**. Με αυτή την κίνηση αποστέλλεται αυτόματα όλος ο φάκελος **EXET-ΕΡΙΤΗΤΟ-ΟΝΟΜΑ** σε συγκεκριμένο server.

**ΠΡΟΣΟΧΗ: Η αποστολή αυτή μπορεί να γίνει ΜΟΝΟ ΜΙΑ ΦΟΡΑ ΑΝΑ ΦΟΙΤΗΤΗ.** Οπότε προτείνεται να την κάνετε πριν αποχωρήσετε από το PCLab.

### ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΣΕΛΙΔΩΝ

Η βασική σελίδα, απ' όπου θα ξεκινά η εργασία σας να ονομασθεί **index.html**

**ΟΛΕΣ** οι σελίδες θα έχουν τη δομή των δύο οριζόντιων πλαισίων (frames), όπου το περιεχόμενο του πάνω πλαισίου θα είναι πάντα το ίδιο (όνομα, επίθετο ΣΕΜΦΕ κ.λπ.)

Για τη μορφή των δύο πρώτων «σελίδων», βλέπε στην άλλη όψη αυτής της σελίδας

Θα πρέπει να συμπεριλάβετε τουλάχιστον ένα πίνακα και στις «Ερωτήσεις» να χρησιμοποιηθεί ένθετο πλαίσιο (inserted frame).

TITAOZ - Microsoft Internet Explorer

File Edit View Favorites Tools Help

Address C:\MATHIMATA\HTML\_PAIDAGWGIKA\2004\_2005\EXETASEIS\_2005\index.html

ΤΡΑΚΑΣ ΝΙΚΟΣ

ΕΜΠΙΣΤΕΜΟΦΕ  
ΚΑΤ.ΦΥΣΙΚΟΥ

## ΠΙΝΑΚΕΣ - ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΙΟΥΛΙΟΣ 2005

→

TITAOZ - Netscape

File Edit View Go Bookmarks Tools Window Help

Address http://C:\MATHIMATA\HTML\_PAIDAGWGIKA\2004\_2005\EXETASEIS\_2005\index.html

ΤΡΑΚΑΣ ΝΙΚΟΣ

ΕΜΠΙΣΤΕΜΟΦΕ  
ΚΑΤ.ΦΥΣΙΚΟΥ

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ....
2. ....
3. ....

• Εφαρμογές



- (α) Να παραστήσετε μ' έναν πίνακα  $X$  τα ποσά που θα πληρώνει κάθε οικογένεια ανά τετράμηνο.  
 (β) Να βρείτε πόσα χρήματα θα πλήρωναν οι ίδιες οικογένειες, αν μείωναν την κατανάλωση ρεφιντοζ κατά 10%.

### 1.6. Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Το προσωπικό μιας εταιρείας κατασκευών ανταλλακτικών αυτοκινήτων κατανέμεται σε τρεις κατηγορίες στις οποίες ανήκουν έμπειροι, εξειδικευμένοι και ανειδίκευτοι εργαζόμενοι. Η εταιρεία έχει δύο εργοστάσια κατασκευών και το προσωπικό είναι καταμερισμένο ως ακολούθως:

	Έμπειροι	Εξειδικευμένοι	Ανειδίκευτοι
1 <sup>ο</sup> Εργοστάσιο	20	18	40
2 <sup>ο</sup> Εργοστάσιο	15	20	30

Η αμοιβή των εργαζομένων κατά κατηγορία τις εργάσιμες ημέρες και η αποζημίωσή τους τις ημέρες αργίας, σε ευρώ, είναι:

	Εργάσιμες	Αργίες
Έμπειροι	60	54
Εξειδικευμένοι	45	39
Ανειδίκευτοι	30	24

Για να βρούμε την ημερήσια δαπάνη της εταιρείας και στα δύο εργοστάσια έχουμε:

- 1<sup>ο</sup> Εργοστάσιο:  $20 \cdot 60 + 18 \cdot 45 + 40 \cdot 30$  για εργάσιμη ημέρα  
 $20 \cdot 54 + 18 \cdot 39 + 40 \cdot 24$  για αργία  
 2<sup>ο</sup> Εργοστάσιο:  $15 \cdot 60 + 20 \cdot 45 + 30 \cdot 30$  για εργάσιμη ημέρα  
 $15 \cdot 54 + 20 \cdot 39 + 30 \cdot 24$  για αργία

Αν όλα τα παραπάνω θέλουμε να τα αποδώσουμε με πίνακες τότε:

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 18 & 40 \\ 15 & 20 & 30 \end{bmatrix} \text{ ονομάζουμε τον } 2 \times 3 \text{ πίνακα εργαζομένων στα δύο εργοστάσια.}$$

$$B = \begin{bmatrix} 60 & 54 \\ 45 & 39 \\ 30 & 24 \end{bmatrix} \text{ ονομάζουμε τον } 3 \times 2 \text{ πίνακα των αποδοχών τους τις εργάσιμες ημέρες και των αποζημιώσεων τις αργίες.}$$

και ο πίνακας  $\Gamma = \begin{bmatrix} 20 \cdot 60 + 18 \cdot 45 + 40 \cdot 30 & 20 \cdot 54 + 18 \cdot 39 + 40 \cdot 24 \\ 15 \cdot 60 + 20 \cdot 45 + 30 \cdot 30 & 15 \cdot 54 + 20 \cdot 39 + 30 \cdot 24 \end{bmatrix}$  είναι ο  $2 \times 2$  πίνακας ημερήσιας δαπάνης της εταιρείας για εργάσιμες και για ημέρες αργίας και στα δύο εργοστάσια της.

Ο πίνακας  $\Gamma$  λέγεται γινόμενο του πίνακα  $A$  με τον πίνακα  $B$  και συμβολίζεται  $A \cdot B$ . Παρατηρήστε ότι το στοιχείο  $\gamma_{11}$  του πίνακα  $\Gamma$  προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της 1<sup>ης</sup> γραμμής του πίνακα  $A$  με τα αντίστοιχα στοιχεία της 1<sup>ης</sup> στήλης του πίνακα  $B$  και προσθέσουμε τα γινόμενα. Αυτή η διαδικασία γίνεται για όλα τα στοιχεία του πίνακα  $\Gamma$  όπως φαίνεται στο επόμενο σχεδιάγραμμα, που δείχνει και το μηχανισμό της πράξης του πολλαπλασιασμού πινάκων. Για παράδειγμα, το στοιχείο  $\gamma_{21}$  του πίνακα  $\Gamma$  προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της 2<sup>ης</sup> γραμμής του  $A$  με τα αντίστοιχα στοιχεία της 1<sup>ης</sup> στήλης του  $B$  και προσθέσουμε τα γινόμενα, δηλαδή:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{ή } \gamma_{21} = 15 \cdot 20 + 20 \cdot 15 + 30 \cdot 10.$$

**Ορισμός:** Αν  $A$  είναι ένας πίνακας  $m \times n$  και  $B$  ένας πίνακας  $n \times p$ , ονομάζουμε γινόμενο του πίνακα  $A$  με τον πίνακα  $B$  και τον συμβολίζουμε  $A \cdot B$  έναν πίνακα  $m \times p$  του οποίου το κάθε στοιχείο  $\gamma_{ij}$  ( $i$  γραμμής και  $j$  στήλης) προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της  $i$  γραμμής του πίνακα  $A$  με τα αντίστοιχα στοιχεία της  $j$  στήλης του πίνακα  $B$  και προσθέσουμε τα γινόμενα. Δηλαδή:

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \dots + \alpha_{in}\beta_{nj}$$

Σχηματικά έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1j} & \dots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \dots & \beta_{2j} & \dots & \beta_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{p1} & \dots & \beta_{pj} & \dots & \beta_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1j} & \dots & \gamma_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{i1} & \dots & \gamma_{ij} & \dots & \gamma_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{m1} & \dots & \gamma_{mj} & \dots & \gamma_{mp} \end{bmatrix}$$

i-γραμμή j-στήλη

Προσοχή στους τύπους των πινάκων:  $A \cdot B = \Gamma$   
 $m \times n$   $n \times p$   $m \times p$

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε πίνακες τέτοιους ώστε ο αριθμός των στηλών του πρώτου πίνακα να έχει το ίδιο πλήθος με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου πίνακα.

### Παραδείγματα

Να βρείτε, όταν ορίζεται ο πολλαπλασιασμός, τα γινόμενα  $AB$  και  $BA$  στις επόμενες περιπτώσεις:

$$(i) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Εδώ ορίζεται το γινόμενο  $AB$  αφού ο  $A$  είναι  $3 \times 2$  πίνακας και ο  $B$  είναι  $2 \times 3$  πίνακας.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 4 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 10 & 9 & 5 \\ 12 & 12 & 4 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Επίσης ορίζεται για το γινόμενο  $BA$  αφού ο  $B$  είναι  $2 \times 3$  πίνακας και ο  $A$  είναι  $3 \times 2$  πίνακας.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 9 & 16 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Είναι φανερό ότι  $AB \neq BA$ .

$$(ii) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (31)$$

Εδώ ορίζεται το γινόμενο  $AB$  αφού ο  $A$  είναι  $2 \times 2$  πίνακας και ο  $B$  είναι  $2 \times 1$  πίνακας.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ 3x + y \end{bmatrix} \quad (32)$$

Δεν ορίζεται όμως ο  $BA$  αφού ο  $B$  είναι  $2 \times 1$  και ο  $A$  είναι  $2 \times 2$ .

$$(iii) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Εδώ ορίζονται τα γινόμενα  $AB$  και  $BA$  αφού οι πίνακες  $A, B$  είναι τετραγωνικοί  $2 \times 2$ .

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ -5 & -10 \end{bmatrix} \quad (37)$$

και εδώ φαίνεται ότι  $AB \neq BA$ .

Επιπλέον, έχουμε δύο πίνακες μη μηδενικούς που έχουν γινόμενο τον μηδενικό πίνακα. ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ λοιπόν στον πολλαπλασιασμό πίνακων η ιδιότητα  $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0$  ή  $B = 0$ . Απλά όταν ένας εκ των δύο πινάκων είναι ο μηδενικός, τότε το γινόμενό τους είναι 0.

### • Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πινάκων

Αν  $\lambda, \mu$  είναι πραγματικοί αριθμοί και  $A, B, \Gamma$  πίνακες, τότε ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες, με την προϋπόθεση ότι ορίζονται κάθε φορά οι πράξεις που σημειώνονται.

- (α)  $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$  προσεταιριστική ιδιότητα
- (β)  $A(B + \Gamma) = AB + A\Gamma$  και  $(B + \Gamma)A = BA + \Gamma A$  επιμεριστική ιδιότητα
- (γ)  $(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)AB$

### Σημειώσεις:

- (i) Στα προηγούμενα παραδείγματα έγινε κατανοητό ότι δεν ισχύει γενικά η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό πινάκων. Αν λοιπόν έχουμε να πολλαπλασιάσουμε μια σειρά πινάκων  $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdots A_n$ , το γινόμενο θα είναι το ίδιο κατά οποιονδήποτε τρόπο και αν εκτελεσθεί ο πολλαπλασιασμός, αρκεί να μην αλλάξουμε τη σειρά των παραγόντων. Π.χ.  $[A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)] \cdots A_n$ .
- (ii) Αν επιπλέον  $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ , τότε έχουμε  $A_1 A_2 \cdots A_n = A^n$ .

**Ορισμός:** Δύναμη ενός ν×ν πίνακα A με εκθέτη θετικό ακέραιο κ, ορίζουμε τον πίνακα  $A^κ = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{κ \text{-παραγόμενος}}$ .

Όταν κ = 1 έχουμε  $A^1 = A$ .

Αν κ, λ θετικοί ακέραιοι και ρ πραγματικός αριθμός, ισχύουν:

- $A^κ \cdot A^λ = A^{κ+λ} = A^λ \cdot A^κ$
- $(A^κ)^λ = A^{κ \cdot λ} = (A^λ)^κ$
- $(ρA)^κ = ρ^κ A^κ$

- **Μοναδιαίος πίνακας**

Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα  $A = \begin{bmatrix} α & β \\ γ & δ \end{bmatrix}$  και τον 2×2 πίνακα  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Παρατηρούμε ότι:

$$A \cdot I_2 = \begin{bmatrix} α & β \\ γ & δ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} α & β \\ γ & δ \end{bmatrix} \quad (40)$$

και

$$I_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} α & β \\ γ & δ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} α & β \\ γ & δ \end{bmatrix} \quad (41)$$

δηλαδή  $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$  για οποιονδήποτε 2×2 πίνακα A.

**Ορισμός:** Ορίζουμε ως μοναδιαίο πίνακα ν×ν το διαγώνιο πίνακα που όλα τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του είναι ίσα με 1 και συμβολίζουμε:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Αν A είναι οποιοσδήποτε τετραγωνικός πίνακας ν×ν ισχύει:

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

### Σημειώσεις:

- (i)  $(I_n)^κ = I_n$  για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο κ.  
 (iii) Αν ο πίνακας A είναι μ×ν τύπου τότε ισχύει  $A \cdot I_ν = A$  και  $I_μ \cdot A = A$ .

π.χ.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$  και  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$  (43)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad (44)$$

- (iii) Τον πίνακα  $I_n$  θα τον γράφουμε απλούστερα I όταν είναι φανερός ο τύπος του από τις πράξεις με τους άλλους πίνακες.

### Εφαρμογές

#### Εφαρμογή 1

$$(45) \quad (47)$$

Θεωρούμε τους πίνακες  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  και  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ . Να αποδείξετε ότι  $A^2 + B^2 = (A+B)^2$ . Ποιό είναι το συμπέρασμα σας;

Λύση

Είναι:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Άρα:  $A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I \quad (50)$

Επίσης  $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ , οπότε: (51)

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (52)$$

Άρα:  $(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I \quad (53)$

Από (1) και (2) έχουμε:  $A^2 + B^2 = (A+B)^2$ .

Το συμπέρασμα είναι ότι γενικά στους πίνακες δεν ισχύουν οι ταυτότητες που γνωρίζουμε στους πραγματικούς αριθμούς. Αυτό συμβαίνει γιατί στους πίνακες δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ( $AB \neq BA$ ).

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, αν θέλαμε να υπολογίσουμε τον πίνακα  $(A+B)^2$  διαφορετικά, θα είχαμε:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Δικαιολογήστε, κάνοντας τις πράξεις μεταξύ των πινάκων, γιατί είναι  $AB + BA = 0$ .

### Εφαρμογή 2

Θεωρούμε τον  $n \times n$  πίνακα  $A$ . Δικαιολογήστε γιατί ισχύει η σχέση  $(3A + 2I)^2 = 9A^2 + 12A + 4I$ . Ποιό είναι το γενικότερο συμπέρασμα;

Λύση

Είναι:

$$\begin{aligned} (3A + 2I)^2 &= (3A + 2I)(3A + 2I) = \\ &= (3A)(3A) + (3A)(2I) + (2I)(3A) + (2I)(2I) = \\ &= 3^2 A^2 + (3 \cdot 2)A + (2 \cdot 3)A + 2^2 I^2 = 9A^2 + 12A + 4I \end{aligned}$$

Αφού για τους πίνακες  $3A$ ,  $2I$  ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού:

$$\begin{aligned} (3A)(2I) &= 6A \\ (2I)(3A) &= 6A \end{aligned} \quad \text{άρα } (3A)(2I) = (2I)(3A)$$

ισχύει και η γνωστή ταυτότητα του διωνύμου στο τετράγωνο. Γενικά, για αυτούς τους πίνακες ισχύουν πάντα οι ταυτότητες.

### Εφαρμογή 3

Θεωρούμε τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{και } \Gamma = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Να υπολογίσετε τα γινόμενα  $AB$  και  $A\Gamma$  και να δικαιολογήσετε γιατί δεν ισχύει η ιδιότητα  $AB = A\Gamma \Rightarrow B = \Gamma$  (νόμος της διαγραφής).

(54)

Λύση

(55)

Είναι φανερό ότι  $AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$  και  $A\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$  άρα  $AB = A\Gamma$ .

Όμως από την ισότητα  $AB = A\Gamma$  δε μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι  $B = \Gamma$ .

### Εφαρμογή 4

Θεωρούμε τον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (56)$$

(α) Να υπολογίσετε τους πίνακες  $A^2$  και  $A^{20}$ .

(β) Αν επιπλέον ισχύει:  $A^{20} + \alpha A^2 + 7\beta I = 0$  τότε να αποδείξετε ότι  $\alpha + \beta + 7^9 = 0$ .

Λύση

$$(α) A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 7I \quad (57)$$

$$A^{20} = (A^2)^{10} = (7I)^{10} = 7^{10} \cdot I^{10} = 7^{10} \cdot I$$

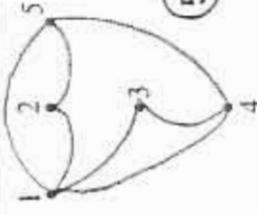
$$(β) A^{20} + \alpha A^2 + (7\beta)I = 0 \Leftrightarrow 7^{10}I + \alpha(7I) + (7\beta)I = 0 \Leftrightarrow (7^9 + \alpha + \beta)(7I) = 0 \text{ και αφού } 7I \neq 0 \text{ τότε } 7^9 + \alpha + \beta = 0.$$

### Εφαρμογή 5

Θεωρούμε πέντε τηλεφωνικά Κέντρα και τα συμβολίζουμε με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5. Από αυτά άλλα συνδέονται με απλή σύνδεση (π.χ. το 1 με το 4) και άλλα με συνδυασμό απλών συνδέσεων (π.χ. το 2 με το 4), όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Οι συνδέσεις αυτές περιγράφονται με έναν  $5 \times 5$  πίνακα  $A = [a_{ij}]$  που ορίζεται κάθε στοιχείο του ως εξής:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{αν } i=j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases} \text{ και τα τηλεφ. κέντρα } i, j \text{ δεν συνδέονται με απλή σύνδεση}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i \neq j \\ 1 & \text{αν } i \neq j \end{cases} \text{ και τα τηλεφ. κέντρα } i, j \text{ συνδέονται με απλή σύνδεση}$$



(58)

- (α) Να ορίσετε τον πίνακα  $A$ .  
 (β) Να υπολογίσετε τον πίνακα  $A^2$  και να ερμηνεύσετε τι εκφράζουν τα στοιχεία του.

Λύση

- (α) Ο
- $5 \times 5$
- πίνακας
- $A$
- είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

και παριστάνει τις απλές συνδέσεις κάθε τηλεφωνικού κέντρου με τα υπόλοιπα.

$$(β) A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Το τυχαίο στοιχείο  $\beta_{ij}$  του πίνακα  $A^2$  μας πληροφορεί για το πλήθος των συνδέσεων του κέντρου  $i$  με το κέντρο  $j$ , με δύο (2) απλές συνδέσεις. Δηλαδή  $\beta_{24} = 2$  σημαίνει ότι το τηλεφωνικό κέντρο 2 συνδέεται με το τηλεφωνικό κέντρο 4 με τις εξής απλές συνδέσεις: 21 - 14 και 25 - 54. Μπορεί να συνδέεται και με τη σύνδεση 21 - 13 - 34 αλλά αυτή είναι μια τριπλή σύνδεση και δεν αφορά τον πίνακα  $A^2$ . Όμοια  $\beta_{55} = 3$  σημαίνει ότι το τηλεφωνικό κέντρο 5 συνδέεται με το τηλεφωνικό κέντρο 5 με τις τρεις απλές συνδέσεις: 51 - 15, 54 - 45, 52 - 25. Όμοια συμπεράσματα έχουμε και για τα υπόλοιπα στοιχεία.

## Ασκήσεις Εμπέδωσης

## Άσκηση 1

Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων, όπου αυτά ορίζονται:

$$(α) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (β) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$(γ) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (δ) [3 \ 1 \ 2] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(ε) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (στ) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

## Άσκηση 2

Θεωρούμε τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Υπολογίστε τα γινόμενα  $A \cdot B$  και  $B \cdot A$ . Ποιό γενικότερο συμπέρασμα εξάγεται;

## Άσκηση 3

Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι μήκη πλευρών τριγώνου  $AB\Gamma$  και για τους πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad M = \begin{bmatrix} \beta & \gamma \\ \gamma & -\beta \end{bmatrix} \quad (64)$$

ισχύει  $A^2 = M^2$ , να δείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

## Άσκηση 4

Θεωρούμε τους  $3 \times 3$  διαγώνιους πίνακες  $A$  και  $B$ .

- (α) Δείξτε ότι:  
 (i)  $AB$  διαγώνιος      (ii)  $AB = BA$   
 (β) Ισχύουν τα ίδια αν οι πίνακες είναι  $3 \times 3$  τριγωνικοί άνω (ή κάτω);