

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ**  
**EAPINO ΕΞΑΜΗΝΟ 2005**

9 1. Να δειχθεί ότι η τετραγωνική συνάρτηση  $f(x) = x^T A x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , όπου  $A$  ένας θετικά ορισμένος πίνακας  $n \times n$ , είναι αυστηρά κυρτή.

(*Σημαντική παρατήρηση 1:* κάθε έννοια που τυχόν θα χρησιμοποιήσετε – δπως θετικός πίνακας  $A$   $n \times n$ , θετικά ορισμένος πίνακας  $A$   $n \times n$ , τετραγωνική συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , κυρτή συνάρτηση, αυστηρά κυρτή συνάρτηση κλπ. – πρέπει να οριστούν με αυστηρά μαθηματικό τρόπο).

2. Έστω το πρόβλημα Βελτιστοποίησης:

Να βρεθεί  $x \in \mathbb{R}^3$  που να ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 \quad \rightsquigarrow \text{ευνέκτιο}$$

κάτω από τον περιορισμό

$$g(x, y, z) = x + y \leq 2. \quad \rightsquigarrow \text{επικύρωση}$$

1. a) Να δοθεί το πλαίσιο βάσει ενός κατάλληλου θεωρήματος ή κατάλληλων θεωρημάτων, ώστε το πρόβλημα αυτό να έχει μια λύση (είναι μάλιστα μοναδική).

(*Σημαντική παρατήρηση 2:* ισχύει η σημαντική παρατήρηση 1).

9 b) Να λυθεί το ανωτέρω πρόβλημα Βελτιστοποίησης μέσω του θεωρήματος Kuhn-Tucker - Langrange.

9 3. Έστω  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{x} \in \Omega$ , και  $f \in C^2$  κοντά στο  $\bar{x}$ . Αν  $\nabla f(\bar{x}) = 0$  και ο πίνακας του Hess  $f_{xx}(\bar{x})$  είναι θετικά ορισμένος, τότε το  $\bar{x}$  είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της  $f$  στο  $\Omega$ .

(*Σημαντική παρατήρηση 3:* για κάθε θεώρημα ή πόρισμα που τυχόν θα χρησιμοποιήσετε πρέπει να δοθεί η διατύπωσή του με πληρότητα).

1 A. a) Εστω  $f$  μια απεικόνιση από ένα ανοικτό υποσύνολο  $\Omega$  ενός διανυσματικού χώρου με νόρμα  $X$  σε ένα διανυσματικό χώρο με νόρμα  $Y$ . Πότε η  $f$  λέγεται παραγωγίσμη Fréchet σε ένα σημείο  $x \in \Omega$ ; Να αποδειχθεί ότι η Fréchet παράγωγος άν υπάρχει είναι μοναδική. Στη περίπτωση πού  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  πώς σχετίζεται η Fréchet παράγωγος με τις πρώτες μερικές παραγώγους της  $f$  και κάτω από ποιές προϋποθέσεις; Τι καλείται παράγωγος Gâteaux της  $f$  στο σημείο  $x$  κατά την κατεύθυνση  $h$ .

b) Να περιγραφεί η μέθοδος της χρυσής τομής για την επίλυση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης. Σε ποιά κατηγορία προβλημάτων χρησιμοποιούμε αυτή τη μέθοδο; Να περιγραφεί ο αλγόριθμος της μεθόδου. Να γραφούν τα βασικά βήματα του αλγορίθμου πλαισιωμένα από τα κατάλληλα σχήματα.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:**

ΘΕΜΑ	1	2A	2B	3	4A	4B
ΜΟΝΑΔΕΣ	2	1	2	2	1	2

- Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες