

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2005

1. Έστω μια τετραγωνική συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ της μορφής $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$, όπου A ένας $n \times n$ πίνακας και $b \in \mathbb{R}^n$ ένα διάνυσμα.

- α) Να δειχθεί ότι, αν ο πίνακας A είναι θετικός (αντ. θετικά ορισμένος), τότε η f είναι κυρτή (αντ. αυστηρά κυρτή).

[Θεωρείστε, για x, y σταθερά, το πολυώνυμο δεύτερου βαθμού ως προς α

$$p(\alpha) = f(x + \alpha(y - x)) - f(x) - \alpha[f(y) - f(x)]. \quad]$$

- β) Να δειχθεί ότι, αν ο A είναι θετικά ορισμένος, τότε η f είναι πιεστική.

- γ) Να δειχθεί ότι, αν ο A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, τότε η f έχει ένα και μοναδικό σημείο ελαχίστου x , το οποίο είναι και η μοναδική λύση του ομαλού γραμμικού συστήματος $Ax = b$.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2$ και το σύνολο

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \leq 0\} \text{ (ημίχωρος).}$$

- α) Πώς ερμηνεύεται η ελαχιστοποίηση της f στο W ; (Να δοθεί το πλαίσιο βάσει ενός κατάλληλου θεωρήματος ή κατάλληλων θεωρημάτων, ώστε το πρόβλημα αυτό να έχει μια λύση).

- β) Να υπολογιστεί το σημείο αυτό με τη χρήση του Θεωρήματος Kuhn-Tucker-Lagrange.

3. Έστω $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \Omega$, και $f \in C^2$ κοντά στο \bar{x} . Αν $\nabla f(\bar{x}) = 0$ και ο πίνακας του Hess $f_{xx}(\bar{x})$ είναι θετικά ορισμένος, τότε το \bar{x} είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο Ω .

4. α) Έστω X, Y δύο διανυσματικοί χώροι με νόρμα και Ω ένα ανοικτό υποσύνολο του X . Να δοθεί ο ορισμός της παραγωγισμότητας Fréchet μιας συνάρτησης $f: \Omega \subset X \rightarrow Y$ σε ένα σημείο $x \in \Omega$.

- β) Να δειχθεί ότι, η αν υπάρχει παράγωγος τύπου Fréchet της f σε ένα σημείο $x \in \Omega$, τότε είναι μοναδική.

- γ) Να περιγραφεί η μέθοδος των συζυγών κλίσεων για την επίλυση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης. Να περιγραφεί ο αλγόριθμος της μεθόδου. Να γραφούν τα βασικά βήματα του αλγορίθμου πλαισιωμένα από τα κατάλληλα σχήματα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

(Σημαντική παρατήρηση: κάθε έννοια που τυχόν θα χρησιμοποιήσετε πρέπει να ορίζεται με αυστηρά μαθηματικό τρόπο).

ΘΕΜΑ	1	2A	2B	3	4A	4B
ΜΟΝΑΔΕΣ	2	1	2	2	1	2

- Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες