



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

Τομέας Μαθηματικών

Πολυτεχνειούπολη – Ζωγράφου ΑΘΗΝΑ - 157 80

TΗ. : 772 1774

FAX : 772 1775

Εξετάσεις Ανάλυσης Χρονοσειρών  
 Ιούνιος 2005

**Ζήτημα 1:** Έστω  $\{X_t\}$  χρονοσειρά MA(q), δηλ.

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_q Z_{t-q} \quad (t \in \mathbb{Z}) \text{ με } \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2).$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση αυτοσυγχέτισης της  $\{X_t\}$  είναι:

$$\rho(h) = \begin{cases} 1, & h = 0, \\ \left\{ \sum_{i=0}^{q-|h|} \theta_i \theta_{i+|h|} \right\} / \left\{ \sum_{i=0}^q \theta_i^2 \right\}, & 0 < |h| \leq q, \\ 0, & |h| > q. \end{cases}$$

**Ζήτημα 2:**

- (i) Να δοθεί ο ορισμός της αιτιατότητας καθώς και ο ορισμός της αντιστρεψιμότητας για μια χρονοσειρά ARMA(p,q):  $\Phi_p(B)X_t = \Theta_q(B)Z_t$  ( $t \in \mathbb{Z}$ ), όπου  $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ .
- (ii) Να δοθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε να είναι η χρονοσειρά ARMA(p,q)
  - (a) αιτιατή, (β) αντιστρέψιμη.
- (iii) Να εξεταστούν ως προς την αιτιατότητα και την αντιστρεψιμότητα οι παρακάτω χρονοσειρές:
  - (a)  $X_t + 0.2X_{t-1} - 0.48X_{t-2} = Z_t$ ,      (β)  $X_t + 1.8X_{t-1} + 0.81X_{t-2} = Z_t$ .

**Ζήτημα 3:** Θεωρούμε τη χρονοσειρά ARMA(1,1)

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1} \text{ με } Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

και με  $|\phi|, |\theta| < 1$ .

- (i) Να γραφεί η χρονοσειρά  $\{X_t\}$  υπό φορφή MA( $\infty$ ):  $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$ .
- (ii) Να δοθεί η αντίστροφη μορφή της, δηλ. να γραφή υπό την μορφή:  $Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}$ .
- (iii) Να προσδιοριστεί η συνάρτηση αυτοσυγχέτισης  $\rho(h)$ .

**Ζήτημα 4:**

- (i) Να δειχθεί ότι σε στάση (υπό ευρεία έννοια) χρονοσειρά  $\{X_t\}$  με μέση τιμή  $\mu$  και συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης  $\gamma(h)$  για  $n \rightarrow \infty$  έχουμε:

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = E[(\bar{X}_n - \mu)^2] \rightarrow 0 \text{ όταν } \gamma(h) \rightarrow 0.$$

- (ii) Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε σειρά τιμών  $\{x_1, \dots, x_n\}$  η δειγματική συνάρτηση αυτοσυνδιαποράς ικανοποιεί τη συνθήκη:  $\sum_{|h|< n} \hat{\gamma}(h) = 0$ .

Διάρκεια εξέτασης: 2 ½ ώρες