Εξετάσεις Θεωρίας Μέτρου
1/2/2006

Θέμα 1 (α) Δώστε τους ορισμούς της σ-άλγεβρας $\mathcal{M}$, όπου $\mathcal{M}$ οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου X, καθώς και του θετικού μέτρου $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$. Επιπλέον δείξτε τα επόμενα.
(i) Αν A, B σύνολα στην $\mathcal{M}$ τότε $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$.
(ii) Αν $(A_n)_n$ αύξουσα ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{M}$ τότε $\lim_n \mu(A_n) = \mu(\bigcup_n A_n)$.
(β) Έστω m το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq [0,1] : A \text{ Lebesgue μετρήσιμο με } m(A) = 1\}$$

Δείξτε τα παρακάτω.
(i) $[0,1] \in \mathcal{F}$.
(ii) Αν $A \subseteq B \subseteq [0,1]$ Lebesgue μετρήσιμα με $A \in \mathcal{F}$ τότε και $B \in \mathcal{F}$.
(iii) Αν $A, B \in \mathcal{F}$ τότε και $A \cap B \in \mathcal{F}$.
(iv) Αν $A \in \mathcal{F}$ τότε το A είναι πυκνό στο $[0,1]$.

Θέμα 2 (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $c \in [-\infty, +\infty]$ το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = c\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.
(β) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$, αν x άρρητος και $f(x) = 0$ αν x ρητός. Δείξτε ότι
(i) Η f είναι σχεδόν παντού ίση με την ταυτοτική συνάρτηση στο $[0,1]$.
(ii) Η f είναι μετρήσιμη.
(iii) Θεωρώντας ότι σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα, το Lebesgue- ολοκλήρωμα μιας συνεχους συνάρτησης ταυτίζεται με το Riemann-ολοκλήρωμά της, υπολογίστε το $\int_{[0,1]} f dm$.

Θέμα 3 (α) (i) Διατυπώστε το θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης.
(ii) Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $f_n = \min\{f, n\}$. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η f_n είναι μετρήσιμη και ότι $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n dm = \int_{\mathbb{R}} f dm$.
(β) (i) Διατυπώστε το Λήμμα Fatou.
(ii) Έστω $(f_n)_n$ ακολουθία μη αρνητικών μετρησίμων συναρτήσεων ορισμένων στο $\mathbb{R}$. Έστω $f = \lim f_n$ και $f_n \leq f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\lim \int_{\mathbb{R}} f_n dm = \int_{\mathbb{R}} f dm$.

Θέμα 4 (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ θέτουμε $E_a = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\}$.
(i) Δείξτε ότι $m(E_a) \leq \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f dm$.
(ii) Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $\int_{\mathbb{R}} f dm < \infty$, δείξτε ότι $\lim_{a \to \infty} m(E_a) = 0$.
(β) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων. Αν $\lim_n \int_{\mathbb{R}} |f_n| dm = 0$, δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $(f_{k_n})_n$ της $(f_n)_n$ ώστε

$$\lim_n f_{k_n} = 0 \text{ σχεδόν παντού.}$$