

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**  
**Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση**

4 Μαρτίου, 2004

**Θέμα 1.** (α') Έστω  $E \subseteq \mathbb{R}$ .

(i) Να αποδειχθεί ότι

$$m^*(E) = \inf \{m(G) : G \supseteq E, G \text{ είναι ανοικτό σύνολο}\}.$$

(1 μον.)

(ii) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ακολουθία ανοικτών συνόλων  $(G_n)$ , με  $G_n \supseteq E$ , τέτοια ώστε  
 $m^*(E) = m(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n)$ . (1 μον.)

(β') Έστω οι Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f(x) = \chi_{\{0\}}(x)$  και  $g(x) = \chi_{(0,1)}(x)$ . Να αποδειχθεί ότι η  $g \circ f$  είναι Lebesgue μετρήσιμη. Είναι οι  $f$  και  $g$  Lebesgue ολοκληρώσιμες; Είναι η  $g \circ f$  Lebesgue ολοκληρώσιμη στο  $\mathbb{R}$ ; Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας. (0,5 μον.)

**Απόδειξη.**

(α') (i) Βλέπε Πρόταση 2.10 (σημειώσεις μαθήματος).

(ii) Για κάθε  $n \in \mathbb{N}^*$  υπάρχει ανοικτό σύνολο  $G_n$ , με  $G_n \supseteq E$ , τέτοιο ώστε

$$m(G_n) \leq m^*(E) + \frac{1}{n}.$$

Επομένως, για κάθε  $n \in \mathbb{N}^*$

$$m^*(E) \leq m(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) \leq m(G_n) \leq m^*(E) + \frac{1}{n}.$$

Άρα,  $m^*(E) = m(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n)$ .

(β') Επειδή  $(g \circ f)(x) = 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , η  $g \circ f$  είναι Lebesgue μετρήσιμη. Είναι  $\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{0\}} dm = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(0,1)}(x) dm = 0$  και επομένως οι  $f$  και  $g$  είναι Lebesgue ολοκληρώσιμες. Όμως είναι  $\int_{\mathbb{R}} g \circ f dm = \infty$ , δηλαδή η  $g \circ f$  δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη.

■

**Θέμα 2.** (α') Έστω  $(f_n)$  ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων,  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ . Να διατυπωθεί το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και να αποδειχθεί ότι

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dm.$$

Εφαρμογή. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ , να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$ . (1,5 μον.)

(β') Υποθέτουμε ότι η  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$  είναι Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αν το  $E \subseteq \mathbb{R}$  είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο, ορίζουμε τη  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  ως εξής:

$$\phi(E) := \int_E f dm.$$

Να αποδειχθεί ότι η  $\phi$  είναι ένα θετικό μέτρο στη  $\sigma$ -άλγεβρα  $\mathcal{M}$  των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων. (1 μον.)

**Απόδειξη.**

(α') Βλέπε Θεώρημα 4.8 (σημειώσεις μαθήματος).  
Εφαρμογή. Επειδή

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} (1-x^2), \quad |x| < 1$$

και η δεύτερη σειρά έχει θετικούς όρους, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = \arctan 1 - \arctan 0 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} (1-x^2) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (x^{4n} - x^{4n+2}) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \end{aligned}$$

(β') Βλέπε Θεώρημα 4.9 (σημειώσεις μαθήματος).

■

Θέμα 3. (α') Για κάθε φυσικό αριθμό  $n \geq 2$  και για κάθε  $0 \leq x \leq 1$ , έστω

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{(1+n^2 x^2) \ln n}.$$

(i) Να υπολογιστεί το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

(ii) Υπάρχει  $\varphi \in L_1[0, 1]$  τέτοια ώστε  $f_n \leq \varphi$  στο  $[0, 1]$ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (1,3 μον.)

(β') Έστω  $(a_n)_{n=2}^{\infty}$  ακολουθία πραγματικών αριθμών με  $|a_n| \leq \ln n$ . Να αποδειχθεί ότι η  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x}$  είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο  $[2, \infty)$  και ότι

$$\int_2^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x} dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^2 \ln n}.$$

(1,2 μον.)

Λύση.

(α') (i)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^1 \frac{n^2 x}{1+n^2 x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2 \ln n} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+t^2)}{2 \ln t} \quad (\text{L'Hôpital}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{1+t^2} = 1. \end{aligned}$$

(ii) Η απάντηση είναι όχι: Επειδή  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ , αν υπήρχε  $\varphi \in L_1[0, 1]$  τέτοια ώστε  $f_n \leq \varphi$  στο  $[0, 1]$ , τότε από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue θα ήταν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0 \neq 1$$

που είναι προφανώς άτοπο.

(β') Επειδή ως γνωστόν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$  συγκλίνει, είναι

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \int_2^{\infty} |a_n| n^{-x} dx &= \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \int_2^{\infty} e^{-x \ln n} dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|}{\ln n} \left( \frac{1}{n^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x \ln n} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^2 \ln n} \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty. \end{aligned}$$

Επομένως, από το Θεώρημα Β. Levi η  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x} \in L_1[2, \infty)$  και

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x} dx &= \sum_{n=2}^{\infty} \int_2^{\infty} a_n n^{-x} dx = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \int_2^{\infty} e^{-x \ln n} dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\ln n} \left( \frac{1}{n^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x \ln n} \right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^2 \ln n}. \end{aligned}$$

■

**Θέμα 4.** Έστω  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  μία Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση και

$$E_n = \{x \in E : n \leq |f(x)| < n+1\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

όπου  $E$  είναι μετρήσιμο σύνολο με  $m(E) < \infty$ . Χρησιμοποιώντας τις ανισότητες

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \chi_{E_n}(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f(x)| \chi_{E_n}(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \chi_{E_n}(x), \quad (1)$$

να αποδειχθεί ότι η  $f \in L_1(E)$ , δηλαδή η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη, αν και μόνο αν  $\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) < \infty$ . (2,5 μον.)

**Απόδειξη.** Επειδή η  $|f|$  είναι μετρήσιμη συνάρτηση, τα σύνολα  $E_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , είναι μετρήσιμα και ξένα μεταξύ τους. Είναι

$$n \chi_{E_n}(x) \leq |f(x)| \chi_{E_n}(x) \leq (n+1) \chi_{E_n}(x),$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και επομένως

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \chi_{E_n}(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f(x)| \chi_{E_n}(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \chi_{E_n}(x).$$

Είναι  $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ , όπου τα σύνολα  $E_n$  είναι μετρήσιμα και ξένα μεταξύ τους. Από τα Θεωρήματα 4.9 και 4.8 (σημειώσεις του μαθήματος)

$$\begin{aligned} \int_E |f(x)| dm(x) &= \int_{\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n} |f(x)| dm(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} |f(x)| dm(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_E |f(x)| \chi_{E_n}(x) dm(x) \\ &= \int_E \sum_{n=0}^{\infty} |f(x)| \chi_{E_n}(x) dm(x). \end{aligned}$$

Όμως, από το Θεώρημα 4.8 (σημειώσεις του μαθήματος)

$$\int_E \sum_{n=0}^{\infty} n \chi_{E_n}(x) dm(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \int_E \chi_{E_n}(x) dm(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n)$$

και παρόμοια

$$\int_E \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \chi_{E_n}(x) dm(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) m(E_n).$$

Άρα, η (1) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) &\leq \int_E |f(x)| dm(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) m(E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) + \sum_{n=0}^{\infty} m(E_n) \\ &\leq m(E_0) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n). \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω ανισότητες είναι προφανές ότι  $f \in L_1(E)$  αν και μόνο αν η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n)$  συγκλίνει, δηλαδή  $\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) < \infty$ . ■

**Θέμα 5.** Έστω  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  μία Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, όπου  $E$  είναι μετρήσιμο σύνολο με  $m(E) < \infty$ .

(α') Αν  $(E_n)$  είναι η ακολουθία των μετρήσιμων συνόλων του προηγούμενου θέματος και

$$A_n = \{x \in E : |f(x)| \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^N m(A_n) = \sum_{n=0}^N nm(E_n) + N \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} m(E_n), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θέμα να αποδειχθεί ότι η  $f \in L_1(E)$ , δηλαδή η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη, αν και μόνο αν  $\sum_{n=0}^{\infty} m(A_n) < \infty$ . (1,5 μον.)

(β') Υποθέτουμε ότι η Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  είναι τέτοια ώστε

$$m(\{x \in E : |f(x)| \geq t\}) < \frac{1}{1+t^2}, \quad \text{για κάθε } t > 0.$$

Αν  $0 < p < 2$ , να αποδειχθεί ότι η  $|f|^p \in L_1(E)$ , δηλαδή η  $|f|^p$  είναι ολοκληρώσιμη. (1 μον.)

**Απόδειξη.**

(α') Είναι  $A_n = \cup_{k=n}^{\infty} E_k$ , όπου  $(E_k)$  είναι ακολουθία μετρήσιμων συνόλων ξένων μεταξύ τους. Επομένως,  $m(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} m(E_k)$  και κατά συνέπεια

$$\sum_{n=1}^N m(A_n) = \sum_{n=0}^N nm(E_n) + N \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} m(E_n), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Αν  $f \in L_1(E)$ , από το προηγούμενο θέμα η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n)$  συγκλίνει και επομένως

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} m(E_n) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} nm(E_n) = 0.$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N m(A_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) < \infty.$$

Αντίστροφα, αν  $\sum_{n=0}^{\infty} m(A_n) < \infty$ , τότε

$$\sum_{n=0}^N nm(E_n) = \sum_{n=1}^N m(A_n) - N \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} m(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$$

και επομένως  $\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) < \infty$ . Άρα, από το προηγούμενο θέμα η  $f \in L_1(E)$ .

(β') Επειδή  $2/p > 1$ , είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(\{x \in E : |f(x)|^p \geq n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} m(\{x \in E : |f(x)| \geq n^{1/p}\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^{2/p}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/p}} < \infty.$$

Απο την προηγούμενη περίπτωση προκύπτει ότι η  $|f|^p \in L_1(E)$ .

■

---

Να επιλέξετε τέσσερα(4) από τα πέντε(5) θέματα

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες