

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Επαναληπτικές Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

30 Σεπτεμβρίου, 2004

Θέμα 1. Έστω η $f : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη, όπου το E είναι μετρήσιμο σύνολο και η $g : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ είναι τέτοια ώστε $f = g$ σ.π.

- (α') Να αποδειχθεί ότι η g είναι μετρήσιμη στο E . (0,7 μον.)
 (β') Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο E , να αποδειχθεί ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο E και ότι

$$\int_E g dm = \int_E f dm.$$

(1 μον.)

(γ') Έστω

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \text{ είναι ρητός,} \\ e^{-|x|} & \text{αν } x \text{ είναι άρρητος.} \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R} και να υπολογιστεί το $\int_{\mathbb{R}} g dm$. (0,8 μον.)

Απόδειξη.

- (α) Βλέπε Λήμμα 3.3 (σημειώσεις μαθήματος).
 (β') Από την (α') η g , καθώς επίσης και οι g^+, g^- είναι μετρήσιμες στο E . Οι συναρτήσεις f^+, f^- και g^+, g^- είναι μετρήσιμες στα μετρήσιμα σύνολα $A = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ και $E \setminus A$. Είναι $m(A) = 0$ και $g^+ = f^+, g^- = f^-$ στο $E \setminus A$. Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο E , θα είναι

$$\begin{aligned} \int_E g^+ dm &= \int_A g^+ dm + \int_{E \setminus A} g^+ dm = \int_{E \setminus A} g^+ dm = \int_{E \setminus A} f^+ dm = \int_A f^+ dm + \int_{E \setminus A} f^+ dm \\ &= \int_E f^+ dm < \infty \end{aligned}$$

και παρόμοια $\int_E g^- dm = \int_E f^- dm < \infty$. Επομένως, η g είναι ολοκληρώσιμη στο E και

$$\int_E g dm = \int_E g^+ dm - \int_E g^- dm = \int_E f^+ dm - \int_E f^- dm = \int_E f dm.$$

(γ') Αν $f(x) = e^{-|x|}$, το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 2.$$

Επομένως, από το Θεώρημα 4.29 (σημειώσεις μαθήματος) η f είναι ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R} και $\int_{\mathbb{R}} f dm = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2$. Επειδή $f = g$ σ.π, από τη (β') η g είναι ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R} και $\int_{\mathbb{R}} g dm = \int_{\mathbb{R}} f dm = 2$.

■

Θέμα 2. (α') Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης να αποδειχθεί το λήμμα του Fatou, δηλαδή ότι

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) dm \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dm.$$

(1 μον.)

(β') Αν (A_n) είναι μία ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του \mathbb{R} , τότε το $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ ορίζεται ως εξής:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{x : x \in A_n \text{ για όλα } n \text{ και } x \text{ εκτός από πεπερασμένα το πλήθος } n\}.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} = \chi_{\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n}.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το λήμμα του Fatou να αποδειχθεί ότι

$$m\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} m(A_n).$$

(1 μον.)

Απόδειξη.

(α') Βλέπε Θεώρημα 4.10 (σημειώσεις μαθήματος).

(β') Είναι

$$\begin{aligned} \chi_{\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n}(x) = 1 &\Leftrightarrow x \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \Leftrightarrow x \in A_n \text{ για όλα } n \\ &\Leftrightarrow \chi_{A_n}(x) = 1 \text{ για όλα } n \\ &\Leftrightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}(x) = 1 \end{aligned}$$

και επομένως $\liminf_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} = \chi_{\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n}$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Fatou με $f_n = \chi_{A_n}$ έχουμε

$$m\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n} dm = \int_{\mathbb{R}} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}\right) dm \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{A_n} dm = \liminf_{n \rightarrow \infty} m(A_n).$$

■

Θέμα 3. (α') Αν $f \in L_1(\mathbb{R})$, δηλαδή η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, να αποδειχθεί ότι $|f(x)| < \infty$ σ.π. (1 μον.)

(β') Αν η $f \in L_1(0, 1)$, να αποδειχθεί ότι $x^n f(x) \in L_1(0, 1)$, για κάθε $n = 1, 2, \dots$ και ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0,1)} x^n f(x) dm(x) = 0.$$

(1 μον.)

Απόδειξη.

(α') Βλέπε Πρόταση 4.14 (σημειώσεις μαθήματος).

(β') Επειδή $f \in L_1(0, 1)$, από την (α') η f είναι πεπερασμένη σ.π. Επομένως, αφού για $x \in (0, 1)$ είναι $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, θα είναι $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n f(x) = 0$ σ.π στο $(0, 1)$. Όμως για $n = 1, 2, \dots$, $|x^n f(x)| \leq |f(x)|$, για κάθε $x \in (0, 1)$ και $f \in L_1(0, 1)$. Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue $x^n f(x) \in L_1(0, 1)$, για κάθε $n = 1, 2, \dots$ και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0,1)} x^n f(x) dm(x) = \int_{(0,1)} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n f(x) dm(x) = 0.$$

■

Θέμα 4. Αν $\alpha < 1$, να υπολογιστεί το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,n)} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dm(x). \quad (1,5 \text{ μον.})$$

Λύση. Έστω $f_n(x) := (1 - x/n)^n e^{\alpha x} \chi_{[0,n)}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = e^{(\alpha-1)x}$, για κάθε $x \geq 0$. Επειδή $e^{-x/n} \geq 1 - x/n$, για κάθε $x \leq n$ θα είναι $(1 - x/n)^n \leq e^{-x}$ οπότε και $(1 - x/n)^n e^{\alpha x} \leq e^{(\alpha-1)x}$. Επομένως, $0 \leq f_n(x) \leq e^{(\alpha-1)x}$, για κάθε $x \geq 0$. Όμως

$$\int_0^\infty e^{(\alpha-1)x} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{(\alpha-1)x} dx = \frac{1}{\alpha-1} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(e^{(\alpha-1)r} - 1 \right) = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Τότε, από το Θεώρημα 4.29 (σημειώσεις μαθήματος) η $e^{(\alpha-1)x}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0, \infty)$ και είναι $\int_{[0,\infty)} e^{(\alpha-1)x} dm(x) = \int_0^\infty e^{(\alpha-1)x} dx = 1/(1-\alpha)$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,n)} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dm(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \chi_{[0,n)} dm(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \chi_{[0,n)} \right] dm(x) \\ &= \int_{[0,\infty)} e^{(\alpha-1)x} dm(x) = \frac{1}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

■

Θέμα 5. Έστω (f_n) ακολουθία πραγματικών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, δηλαδή $f_n \in L_1(\mathbb{R})$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει $f \in L_1(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n - f| dm \leq \frac{1}{n^2}, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

(α') Να αποδειχθεί πρώτα ότι

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f_{n-1}| dm < \infty$$

και στη συνέχεια ότι η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} (f_n(x) - f_{n-1}(x))$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο \mathbb{R} και το άθροισμά της είναι μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση. (1 μον.)

(β') Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, σχεδόν παντού στο \mathbb{R} . (1 μον.)

Απόδειξη.

(α') Για $n \geq 2$ είναι $\int_{\mathbb{R}} |f_n - f_{n-1}| dm \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| dm + \int_{\mathbb{R}} |f_{n-1} - f| dm \leq 1/n^2 + 1/(n-1)^2$. Επομένως

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f_{n-1}| dm \leq \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} < \infty.$$

Άρα, από το θεώρημα B. Levi η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} (f_n(x) - f_{n-1}(x))$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο \mathbb{R} και το άθροισμά της είναι μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(β') Ιος τρόπος. Αν $g(x) = f_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty} (f_k(x) - f_{k-1}(x))$, επειδή

$$f_n(x) = f_1(x) + \sum_{k=2}^n (f_k(x) - f_{k-1}(x)),$$

είναι $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x)$, σχεδόν παντού στο \mathbb{R} , $g \in L_1(\mathbb{R})$ και

$$|f_n(x)| \leq |f_1(x)| + \sum_{k=2}^{\infty} |f_k(x) - f_{k-1}(x)| \in L_1(\mathbb{R}), \quad \text{σχεδόν παντού στο } \mathbb{R}.$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue είναι $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - g| dm = 0$ και κατά συνέπεια

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| dm \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| dm + \int_{\mathbb{R}} |f_n - g| dm \leq \frac{1}{n^2} + \int_{\mathbb{R}} |f_n - g| dm \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Δηλαδή $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού στο \mathbb{R} . Άρα, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, σχεδόν παντού στο \mathbb{R} .

Σημείωση. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι $f(x) = g(x)$, σχεδόν παντού στο \mathbb{R} , χρησιμοποιώντας και το λήμμα του Fatou. Πράγματι,

$$\int_{\mathbb{R}} |g - f| dm = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n - f| dm \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| dm = 0.$$

2ος τρόπος. Επειδή $\sum_{n=2}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| dm \leq \sum_{n=2}^{\infty} 1/n^2 < \infty$, από το θεώρημα B. Levi η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} (f_n(x) - f(x))$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο \mathbb{R} . Άρα, $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f(x)) = 0$ σχεδόν παντού στο \mathbb{R} και ισοδύναμα $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ σχεδόν παντού στο \mathbb{R} .

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες