Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Δίκτυα Επικοινωνιών
Ιούλιος 2000

Θέμα 1 (40%)

Θεωρούμε απλουστευμένο στοχαστικό μοντέλο που περιγράφει τη δυναμική ενός συστήματος πολλαπλής προσπέλασης CSMA (Carrier Sense Multiple Access) Slotted Aloha. Τα πακέτα πληροφορίας (που διακινούνται μέσω του εν λόγω συστήματος) καταφθάνουν απ'τον εξωτερικό κόσμο στα πλαίσια μιάς διαδικασίας Poisson με μέσο ρυθμό (άφιξης) λ (πακέτα/μονάδα χρόνου). Όλα τα ως άνω πακέτα χαρακτηρίζονται από το ίδιο μήκος (σε δυαδικά σύμβολα) και συνεπάγονται τον ίδιο χρόνο μετάδοσης (επιτυχούς ή μη) που (χάριν απλούστευσης των υπολογισμών) υποτίθεται μοναδιαίος (μία μονάδα χρόνου). Το συνολικό πλήθος των διασυνδεδεμένων σταθμών m θεωρείται αρκετά μεγάλο (θεωρητικά άπειρο) στο μέτρο που το οποιοδήποτε νεοεισερχόμενο πακέτο (υποτίθεται πως) αντικρύζει τον αντίστοιχο σταθμό (απολύτως) ελεύθερο. Αυτός ο σταθμός (αμέσως μετά τη στέγαση του νεοαφιχθέντος πακέτου) στιγματίζεται ως κλειδωμένος και παραμένει κλειδωμένος μέχρι τη χρονική στιγμή όπου θα έχει επικυρωθεί η επιτυχής μετάδοση του οικείου πακέτου, δηλαδή μέχρι την εκπνοή της άεργης-β-σχισμής (idle-β-slot) που έχει χρονικό εύρος β (β<<1) και ακολουθεί εκείνη της επιτυχούς του μετάδοσης. Αμέσως μετά την εκπνοή της k-οστής (κατ'αύξουσα σειρά εμφάνισης στο προσκήνιο) άεργης-β-σχισμής κάθε κλειδωμένος σταθμός (και ανεξάρτητα των υπολοίπων) είτε επιχειρεί μετάδοση με πιθανότητα $q_r(k)$, είτε σιωπά και επιφυλάσσεται για το άμεσο μέλλον. Η πιθανότητα $q_r(k)=q_r(n_k)$ ποικίλλει από άεργη σε άεργη σχισμή και εξαρτάται (αποκλειστικά) από το εκτιμώμενο μέσο πλήθος των κλειδωμένων σταθμών n_k κατά την εκπνοή της αντίστοιχης (k-οστής) άεργης-β-σχισμής. Της k-οστής άεργης-β-σχισμής έπονται είτε μια σχισμή επιτυχούς μετάδοσης και μοναδιαίου χρονικού εύρους (γεγονός που αντιστοιχεί σε ένα και μοναδικό εγχείρημα μετάδοσης) ακολουθούμενη από την [k+1]-οστή άεργη-β-σχισμή, είτε μια σχισμή σύγκρουσης (επίσης) μοναδιαίου χρονικού εύρους (γεγονός που αντιστοιχεί σε δύο ή περισσότερα ταυτόχρονα εγχειρήματα μετάδοσης) ακολουθούμενη παρομοίως από την [k+1]-οστή άεργη-β-σχισμή, είτε αυτή καθεαυτή η [k+1]-οστή άεργη-β-σχισμή (γεγονός που αντιστοιχεί στην απόλυτη στιγμιαία σιωπή και απραξία του συνόλου των κλειδωμένων σταθμών). Το χρονικό σημείο όπου εκπνέει η k-οστή ([k+1]-οστή) άεργη-β-σχισμή συμβολίζεται με T_k (T_{k+1}). Υποθέτουμε τέλος, ότι το συνολικό πλήθος των κλειδωμένων σταθμών N_k κατά την εκπνοή της k-οστής άεργης-β-σχισμής ακολουθεί (ως τυχαία μεταβλητή) τη κατανομή Poisson με παράμετρο (ή μέσο) το μέγεθος n_k. Είναι τώρα προφανές πως η στοχαστική διαδικασία (διακριτού χρόνου) $\{N_k\}_{k=1,2,3,4,5,\ldots}$ περιγράφει (εν προκειμένω) τη δυναμική του συστήματος CSMA Slotted Aloha.

A. Αναφορικά με την υπό συνθήκη (καμμιά μετάδοση πακέτου αμέσως μετά την T_k) κατανομή του συνολικού πλήθους των κλειδωμένων σταθμών αμέσως μετά τη χρονική στιγμή T_k να αποδειχθεί ότι:

$$\Pr\{N_k = i/[T_k, T_{k+1}]: idle-\beta-slot\} = \exp\{-n_k[1-q_r(n_k)]\}\frac{\{n_k[1-q_r(n_k)]\}^i}{i!} \quad , \quad i=0,1,2\ldots$$

B. Ποιά σχέση οφείλουν να εκπληρώνουν τα μεγέθη n_{k+1}, n_k, $q_r(n_k)$, λ και β αν αμέσως μετά τη χρονική στιγμή T_k ακολουθεί μία (τουλάχιστον) άεργη-β-σχισμή;

Θέμα 2 (30%)

Στην είσοδο ενός μικρού τηλεφωνικού κέντρου 3 εξερχομένων γραμμών (πόλεως) καταφθάνουν τηλεφωνικές κλήσεις στα πλαίσια μιας διαδικασίας Poisson με αντίστοιχο μέσο ρυθμό λ κλήσεις/min. Οι χρόνοι συνδιάλεξης που συνεπάγονται οι διαδοχικές κλήσεις (ανεξάρτητοι των χρονικών διαστημάτων που μεσολαβούν ανάμεσα στις διαδοχικές αφίξεις) συγκροτούν μια ακολουθία ανεξάρτητων και ταυτόσημα κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών (i.i.d.) με (κοινή)

21

κατανομή αναφοράς την εκθετική και μέσο (χρόνο συνδιάλεξης) 1/μ min/κλήση. Δυνατότητα αναμονής μιάς κλήσης δεν υφίσταται.

Α. Παρακολουθούμε την εξέλιξη της κατάστασης (πλήθος των εν εξελίξει συνδιαλέξεων) του συστήματος N(t) συναρτήσει του χρόνου καθ'όλη τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος [0,T], υποθέτοντας πως το T είναι αρκετά μεγάλο. Συνακόλουθα, εισάγουμε τη συνάρτηση $I_3(t)$ και το συναφές μέγεθος $\overline{p}_3$ ως εξής:

$$I_3(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t : N(t) = 3 \\ 0 & , \quad t : N(t) \neq 3 \end{cases} \qquad , \qquad \overline{p}_3 = \frac{1}{T}\int_0^T I_3(t)dt$$

Να δοθεί μια προσεγγιστική έκφραση (συναρτήσει των παραμέτρων λ και μ) για το ως άνω μέγεθος $\overline{p}_3$.

Β. Τη χρονική στιγμή t (t>T) "φωτογραφίζουμε" το τηλεφωνικό κέντρο και διαπιστώνουμε ότι βρίσκεται στη κατάσταση 3 (τρείς συνδιαλέξεις σε εξέλιξη). Σε ποιό ενδεχόμενο αναφορικά με την τύχη της αμέσως επόμενης (μετά τη t) άφιξης (κλήσης για αποκατάσταση συνδιάλεξης) αντιστοιχεί η παρακάτω πιθανότητα:

$$\frac{\lambda}{\lambda + 3\mu}$$

Γ. Η τυχαία μεταβλητή R_3 αντιπροσωπεύει το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί ανάμεσα στη χρονική στιγμή t και τη πρώτη (μετά τη t) μετάβαση του συστήματος στη κατάσταση 2 (δύο συνδιαλέξεις σε εξέλιξη). Να προσδιοριστεί (συναρτήσει των βασικών ως άνω παραμέτρων) η παρακάτω προσδοκητή (μέση) τιμή:

$$\overline{R}_3 = E[R_3]$$

Θέμα 9 (30%)

Ο κόμβος *A* στέλνει στον κόμβο πακέτα με ρυθμό 112 kb/s. Κάθε πακέτο αποτελείται από 10,000 bits. Μεταξύ των *A* και *B* παρεμβάλλονται στο δίκτυο πολλοί άλλοι κόμβοι, με αποτέλεσμα τα πακέτα που τελικά φθάνουν στον κόμβο *B* να ακολουθούν την κατανομή Poisson, δηλαδή η πιθανότητα να φθάσουν *k* πακέτα σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα μήκους *t* δίνεται από τον τύπο $e^{-\lambda t}(\lambda t)^k/k!$ όπου λ είναι ο μέσος ρυθμός αφίξεων (σε πακέτα ανά μονάδα χρόνου). Επί πλέον λόγω του παρεμβαλλομένου δικτύου ένα ποσοστό 0,2 % των πακέτων χάνεται. Ο κόμβος *B* θεωρεί ότι η σύνοδός με τον *A* έχει απωλεσθεί και την τερματίζει εφόσον δεν πάρει κανένα πακέτο για χρονικό διάστημα μήκους *T*. Υπολογίστε το ανεκτό διάστημα *T* έτσι ώστε η πιθανότητα τερματισμού της συνόδου να είναι μικρότερη από 10^{-7}.

[*Διάρκεια διαγωνίσματος: 2 ώρες. Μπορείτε να συμβουλεύεστε μόνο τα βιβλία σας.*]