



**Κανονική εξέταση του μαθήματος «Θεωρία Ομάδων στη Φυσική»
ΣΕΜΦΕ**

Αθήνα 28 Ιουλίου 2005

Διδάσκων : Ε. Λιαροκάπης

Διάρκεια : 2 ώρες

Τα θέματα θεωρούνται βαθμολογικά ισοδύναμα.

Δεν επιτρέπονται σημειώσεις, βιβλία και κινητά τηλέφωνα.

Θέμα 1° : Θεωρήστε το σύνολο των πινάκων της μορφής $\begin{pmatrix} 2^k & f(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, όπου k είναι ένας ακέραιος αριθμός και $f(x)$ πολυώνυμο ως προς x . Να ελέγξετε όλες τις ιδιότητες ορισμού μιας ομάδας και να αποδείξετε ότι οι πίνακες αποτελούν ομάδα με συνδυαστική πράξη τον πολλαπλασιασμό. Είναι η ομάδα αβελιανή;

Θέμα 2° : Δημιουργήστε αναπαραστάσεις της ομάδας D_3 ενός ισοπλεύρου τριγώνου ζεκινώντας από την συνάρτηση $zf(r)x^2$, όπου z είναι ο άξονας 3^{ης} τάξης συμμετρίας και $f(r)$ τυχαία συνάρτηση του $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Αν η αναπαράσταση είναι αναγώγιμη, κάντε την αναγωγή και βρείτε τους κατάλληλους συνδυασμούς των συναρτήσεων που παράγουν τις αντίστοιχες μη-αναγώγιμες αναπαραστάσεις.

Θέμα 3° : Σε κάποιο μόριο τα άτομα είναι τοποθετημένα στις κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου με ομάδα συμμετρίας την D_3 . Τι είδους μεταπτώσεις επιτρέπονται ανάμεσα στους εσωτερικούς τρόπους ταλάντωσης στην φασματοσκοπία IR (μετασχηματίζεται όπως ένα διάνυσμα) και τι στην φασματοσκοπία Raman (μετασχηματίζεται όπως ένας συμμετρικός τανυστής 2^{ης} τάξης);

Θέμα 4° : Ας παραδεχτούμε ότι σε κάποιο μόριο το ιόν του Ni βρίσκεται στο κέντρο ενός τετραγώνου με ομάδα συμμετρίας την D_4 , όπου στις κορυφές του τετραγώνου υπάρχουν τέσσερα ίδια ιόντα. Στο ελεύθερο άτομο του Ni οι πέντε d στιβάδες (yz , zx , xy , x^2-y^2 , $2z^2-x^2-y^2$) είναι εκφυλισμένες. Βρήτε τους χαρακτήρες της αναπαράστασης της ομάδας D_4 , που δημιουργείται από αυτές τις 5 συναρτήσεις. Αίρεται ο ενεργειακός εκφυλισμός των d στιβάδων του Ni μέσα στο ιόν; Βρήτε συμμετρικούς συνδυασμούς αυτών των d συναρτήσεων που μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις μη-αναγώγιμες αναπαραστάσεις της ομάδας D_4 .

Δίνονται οι πίνακες χαρακτήρων των ομάδων D_3 και D_4

D_3	e	$2c_3$	$3c_2$			
A_1	1	1	1	z^2	x^2+y^2	
A_2	1	1	-1	z	I_z	
E	2	-1	0	x ,	I_x ,	xz ,
				y	I_y	yz
						x^2-y^2
						xy

D_4	e	c_4^2	c_4	c_{2x}	c_{2d}	
A_1	1	1	1	1	1	x^2+y^2, z^2
A_2	1	1	1	-1	-1	z, I_z
B_1	1	1	-1	1	-1	x^2-y^2
B_2	1	1	-1	-1	1	xy
E	2	-2	0	0	0	$(xz, yz), (x, y), (I_x, I_y)$