

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

24/6/2003

Διδάσκων Σ. ΑΡΓΥΡΟΣ

Θέμα 1.

(α) Έστω X διανυσματικός χώρος και $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμικές. Δείξτε τα παρακάτω:

- $f[X] = 0$ ή $f[X] = \mathbb{R}$.
- Αν $f \neq 0$ τότε ο $\ker f$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του X συνδιάστασης 1.
- Αν $\ker f = \ker g$ τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f = \lambda g$.

(β) Έστω X χώρος με νόρμα και Y διανυσματικός υπόχωρος του X . Δείξτε ότι ο \overline{Y} είναι επίσης διανυσματικός υπόχωρος του X .

Θέμα 2.

(α) Θέτουμε $X = (c_{00}, \|\cdot\|_1)$ και $Y = (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$.

- Δείξτε ότι η ταυτοτική απεικόνιση $I : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής και υπολογίστε τη νόρμα της.
- Δείξτε ότι $I^{-1} : Y \rightarrow X$ δεν είναι συνεχής.

(β) Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Αποδείξτε τα παρακάτω:

- Υπάρχει $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική μη συνεχής.
- Ο X περιέχει γραμμικό υπόχωρο που δεν είναι κλειστός. Μπορεί αυτό να συμβεί σε χώρους πεπερασμένης διάστασης;

Θέμα 3.

(α) Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ορθοκανονική βάση του H . Δείξτε ότι για κάθε $x^* \in H^*$, $x^*(e_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

(β) Δείξτε ότι σε κάθε χώρο Hilbert H η νόρμα είναι αυστηρά κυρτή, δηλαδή αν $x, y \in H$ με $x \neq y$ και $\|x\| = \|y\| = 1$ τότε $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$.

(γ) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, $T : X \rightarrow \ell_2$ γραμμικός, φραγμένος 1-1 τελεστής. Για κάθε $x \in X$ θέτουμε $\|x\| = (\|x\|^2 + \|Tx\|^2)^{1/2}$. Δείξτε ότι:

- $H \|\cdot\|$ είναι νόρμα στον X και ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$.
- $H \|\cdot\|$ είναι αυστηρά κυρτή νόρμα.

Θέμα 4.

(α) Αν $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα δείξτε ότι για κάθε $x \in X$,

$$\|x\| = \sup\{x^*(x) : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\}.$$

(β) Ορίστε την κανονική εμφύτευση του X στον X^{**} και αποδείξτε ότι:

- (i) Είναι γραμμική.
- (ii) Είναι ισομετρία.

Θέμα 5.

(α) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Θέτουμε $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ με $T^*(y^*) = y^* \circ T$, για κάθε $y^* \in Y^*$. Δείξτε ότι:

- (i) Ο T^* είναι γραμμικός.
- (ii) Ο T^* είναι φραγμένος.
- (iii) $\|T^*\| = \|T\|$.

(β) Έστω K κυρτό υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα X με $0 \in \text{Int } K$. Δώστε τον ορισμό του συγαρτησοειδούς Minkowski ρ_K του K . Έστω K_1, K_2 κυρτά υποσύνολα ενός χώρου με νόρμα X με $0 \in \text{Int } K_1 \cap \text{Int } K_2$.

- (i) Αν $K_1 \subseteq K_2$ δείξτε ότι $\rho_{K_2}(x) \leq \rho_{K_1}(x)$, για κάθε $x \in X$.
- (ii) Δείξτε ότι $\rho_{K_1 \cap K_2}(x) = \max\{\rho_{K_1}(x), \rho_{K_2}(x)\}$ για κάθε $x \in X$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!