

**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ «ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ»  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ  
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / Κατεύθυνση Φυσικού**

ΑΘΗΝΑ 26/1/2004, ΩΡΑ:15.00

- Θέμα 1º :** (Mov. 0.75). (α) Δώστε ένα παράδειγμα ημιγραμμικής διαφορικής εξίσωσης 1<sup>ης</sup> τάξης στον  $\mathbb{R}^2$ .  
(β) Δώστε ένα παράδειγμα γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2<sup>ης</sup> τάξης παραβολικού τύπου στον  $\mathbb{R}^2$ .

**Θέμα 2º :** (Mov. 1.75). Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(\rho, \varphi) = 0, \quad 1 < \rho < 5, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$u(1, \varphi) = 5 \cos 3\varphi, \quad u(5, \varphi) = 7 \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Δίνεται ο διαφορικός τελεστής Laplace σε πολικές συντεταγμένες:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

**Θέμα 3º :** (Mov. 1.25). Να βρεθεί η συνάρτηση Green του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad \underline{x} = (x, y) \in (-\infty, 0) \times (-\infty, \infty),$$

$$\frac{\partial u(0, y)}{\partial \underline{n}} = f(y),$$

όπου  $f$  γνωστή συνάρτηση και  $\underline{n}$  η εξωτερική κάθετος. Δίνεται η θεμελιώδης λύση για το διαφορικό τελεστή Laplace στον  $\mathbb{R}^2$ :

$$E(\underline{x}; \underline{x}') = \frac{1}{2\pi} \ln[(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}.$$

**Θέμα 4º :** (Mov. 0.75). (α) Πότε επιλύεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(\rho, \varphi) = \cos 2\varphi, \quad 0 \leq \rho < 5, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$\frac{\partial u(5, \varphi)}{\partial \underline{n}} = \cos \varphi + A, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

όπου  $\underline{n}$  η εξωτερική κάθετος.

(β) (Mov. 0.5). Δώστε τη μορφή της λύσης του προβλήματος:

$$\Delta u(\rho, \varphi) = \rho \cos 3\varphi, \quad 0 \leq \rho < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$u(2, \varphi) = 0 \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

**Θέμα 5<sup>ο</sup>:** (Μον. 2). (α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

(β) Είναι η εξίσωση σε μορφή Sturm-Liouville; Να δώσετε μία σχέση ορθογωνιότητας που προκύπτει από το πρόβλημα.

(γ) Να λυθεί, με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλλακτική μέθοδος Fredholm), το ημιομογενές πρόβλημα:

$$y''(x) + \Lambda y(x) = \sin x, \quad 0 < x < \pi, \quad y(0) = y(\pi) = 0,$$

όταν  $\Lambda = 4, \pi$ .

**Θέμα 6<sup>ο</sup>:** (Μον. 1.7). Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$$u_t(x,t) = 5u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 3, \quad t > 0,$$

$$u_x(0,t) = u(3,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = x, \quad 0 < x < 3.$$

**Θέμα 7<sup>ο</sup>:** (Μον. 1.3). Να λυθεί (να δοθεί η λύση υπό ολοκληρωτική μορφή) το πρόβλημα αρχικών τιμών για την κυματική εξίσωση, με χρήση του μετασχηματισμού Fourier.

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) - 3u(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Fourier.

**Δίνονται:**

$$1. \quad \mathbf{F}\{u(x,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{isx} dx = \hat{u}(s,t),$$

$$2. \quad \mathbf{F}^{-1}\{\hat{u}(s,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(s,t) e^{-isx} ds = u(x,t),$$

$$3. \quad \mathbf{F}\{u_{xx}(x,t)\} = (-is)^2 \hat{u}(s,t),$$

$$4. \quad \mathbf{F}\{e^{-\frac{1}{2}x^2}\} = e^{-\frac{1}{2}s^2}.$$

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**