

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ «ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ»
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / Κατ. Μαθηματικού Εφαρμογών**

ΑΘΗΝΑ 26/1/2004, ΩΡΑ:15.00

Θέμα 1^ο: (α) (Mov. 0.25). Δώστε τη γενική μορφή της σχεδόν γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 1^{ης} τάξης στον \mathbb{R}^3 .

(β) (Mov. 1.25). Να λυθεί το πρόβλημα Cauchy:

$$u_x + u_y = u, \quad u = u(x, y),$$

$$u = \cos t \quad \text{πάνω στην καμπύλη } C: \quad x = t, \quad y = 0, \quad -\infty < t < \infty.$$

Θέμα 2^ο: (Mov. 1.5). Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(x, y, t) = u_{tt}, \quad (x, y) \in (0, 2) \times (0, 3), \quad t > 0,$$

$$u(0, y, t) = u(2, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, 3, t) = 0,$$

$$u(x, y, 0) = 5 \sin \frac{3\pi x}{2} \sin \frac{\pi y}{3},$$

$$u_t(x, y, 0) = 0.$$

Θέμα 3^ο: (α) (Mov. 0.75). Πότε επιλύεται το πρόβλημα,

$$\Delta u(\rho, \varphi) = 5 \cos 2\varphi, \quad 2 < \rho < 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$\frac{\partial u(2, \varphi)}{\partial \rho} = \cos \varphi + 5, \quad \frac{\partial u(3, \varphi)}{\partial \rho} = \sin 2\varphi + A.$$

(β) (Mov. 1.25). Να υπολογίσετε τη συνάρτηση Green και να δώσετε την ολοκληρωτική μορφή της λύσης του προβλήματος:

$$\Delta u(x, y) = g(x, y), \quad \underline{x} = (x, y) \in (0, \infty) \times (-\infty, \infty),$$

$$\frac{\partial u(0, y)}{\partial \underline{y}} = f(y),$$

όπου g, f γνωστές συναρτήσεις και \underline{y} η εξωτερική κάθετος. Δίνεται η θεμελιώδης λύση για το διαφορικό τελεστή Laplace στον \mathbb{R}^2 :

$$E(\underline{x}; \underline{x}') = \frac{1}{2\pi} \ln[(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}.$$

Θέμα 4^ο: (Mov. 2). (α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y'(0) = y'(1) = 0.$$

(β) Είναι η εξίσωση σε μορφή Sturm-Liouville; Να δώσετε μία σχέση ορθογωνιότητας που προκύπτει από το πρόβλημα.

(γ) Να λυθεί, με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλλακτική μέθοδος Fredholm), το ημιομογενές πρόβλημα:

$$y''(x) + \Lambda y(x) = 1, \quad 0 < x < 1, \quad y'(0) = y'(1) = 0,$$

όταν $\Lambda = 1, \pi^2$.

Θέμα 5^ο: (Mov. 2). Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$$u_t(x,t) = 3u_{xx}(x,t) - 3, \quad 0 < x < 5, \quad t > 0,$$

$$u(0,t) = u_x(5,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \frac{x^2}{2} - 4x, \quad 0 < x < 5.$$

Θέμα 6^ο: (Mov. 1). Με χρήση του συνημιτονικού μετασχηματισμού, Fourier, να δείξετε ότι η λύση για το πρόβλημα,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad y > 0,$$

$$u(0,y) = 0, \quad u(\pi,y) = e^{-y}, \quad y > 0,$$

$$u_y(x,0) = 0, \quad 0 < x < \pi,$$

$$\text{είναι: } u(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sinh sx}{(1+s^2)\sinh s\pi} \cos sy ds,$$

(υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Fourier).

Δίνονται:

$$1. \quad F_c \{u(x,y)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} u(x,y) \cos sy dy = \hat{u}(x,s),$$

$$2. \quad F_c^{-1} \{\hat{u}(x,s)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{u}(x,s) \cos sy ds = u(x,y),$$

$$3. \quad F_c \{u_{yy}(x,y)\} = -s^2 \hat{u}(x,s) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_y(x,0),$$

$$4. \quad F_c \{e^{-y}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{s^2 + 1},$$