

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ

«ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ»

ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / Κατεύθυνση Μαθηματικού Εφαρμογών

ΑΘΗΝΑ 27/9/2006,

ΩΡΑ: 15:00

Θέμα 1°

(α) (βαθ. 1,25). Να λυθεί το πρόβλημα Cauchy:

$$u_x + u_y = u, \quad u(x, 0) = \cos x.$$

(β) (βαθ. 0,75). Να υπολογίσετε το A ώστε το παρακάτω πρόβλημα να είναι επιλύσιμο:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u(x, y) = 5xy, \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 2), \\ u_x(0, y) = 3y, \quad u_x(1, y) = 2y^2, \\ u_y(x, 0) = 2x, \quad u_y(x, 2) = A, \end{array} \right\}.$$

Θέμα 2° : (βαθ. 1,5).

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την κυματική εξίσωση :

$$\left. \begin{array}{l} u_{tt}(x, y, t) = c^2 [u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t)], \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \quad t > 0, \\ u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0, \quad 0 < y < 2, \quad t > 0, \\ u(x, 0, t) = u(x, 2, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, y, 0) = 3 \sin 2\pi x \sin 3\pi y, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \\ u_t(x, y, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2. \end{array} \right\}.$$

Θέμα 3° : (βαθ. 1,5).

Να βρεθεί η συνάρτηση Green και η ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}, \quad (x, y) \in (0, +\infty) \times (-\infty, +\infty), \\ u(0, y) = \frac{1}{1+y^2}, \end{array} \right\}.$$

Δίνεται η θεμελιώδης λύση για το διαφορικό τελεστή Laplace στον \mathbb{R}^2 :

$$E(\underline{x}; \underline{x}') = \frac{1}{2\pi} \ln[(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}, \quad \underline{x} = (x, y), \quad \underline{x}' = (x', y').$$

Θέμα 4° : (βαθ. 2,3).

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y''(x) + 4y'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < 5, \quad y(0) = y(5) = 0.$$

(β) Να λυθεί, με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλλακτική μέθοδος Fredholm), το ημιομογενές πρόβλημα:

$$y''(x) + 4y'(x) + \pi y(x) = e^{-2x}, \quad 0 < x < 5, \quad y(0) = y(5) = 0.$$

(γ) Να αναπτυχθεί σε γενικευμένη σειρά Fourier ως προς τις ιδιοσυναρτήσεις του (α), η συνάρτηση $f(x) = e^{2x}$.

Θέμα 5° : (βαθ. 1,5).

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση

θερμότητας: $\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & 0 < x < 5, t > 0, \\ u_x(0,t) = 2, \quad u_x(5,t) = 3, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 5. \end{cases}$

Δώστε μία φυσική ερμηνεία αυτού του προβλήματος, αν $u = u(x,t)$ παριστάνει θερμοκρασία.

Θέμα 6° : (βαθ. 1,2).

Με χρήση του μετασχηματισμού Fourier, να δείξετε ότι η λύση για το πρόβλημα αρχικών τιμών,

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < |x| \leq 1, \\ 0, & 1 < |x| \end{cases}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\text{είναι: } u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin s \cos sx}{s} e^{-a^2 s^2 t} ds,$$

(υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Fourier).

Δίνονται:

$$1. \quad F\{u(x,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{isx} dx = \hat{u}(s,t),$$

$$2. \quad F^{-1}\{\hat{u}(s,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(s,t) e^{-isx} ds = u(x,t),$$

$$3. \quad F\{u_{xx}(x,t)\} = (-is)^2 \hat{u}(s,t).$$