

Εξετάσεις Κυρτής Ανάλυσης

27/9/2005

Θέμα 1 (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι $f\left(\sum_{i=1}^n r_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n r_i f(x_i)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $r_1, \dots, r_n > 0$ τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^n r_i = 1$ και για κάθε x_1, \dots, x_n στο \mathbb{R} .

(β) Δείξτε ότι $\prod_{i=1}^n x_i^{r_i} \leq \sum_{i=1}^n r_i x_i$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $r_1, \dots, r_n > 0$ τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^n r_i = 1$ και για κάθε x_1, \dots, x_n στο $(0, +\infty)$ (πλήρης δικαιολόγηση).

Θέμα 2 Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό ώστε το $IntK$ είναι μη κενό.

(α) Δείξτε ότι το $IntK$ είναι επίσης κυρτό.

(β) Αν $y \in IntK$ και $x \in K$ δείξτε ότι $[y, x] \subseteq IntK$.

(γ) Δείξτε ότι $K \subseteq \overline{IntK}$.

(δ) Δείξτε ότι για κάθε συνοριακό σημείο x του K υπάρχει υπερεπίπεδο στήριξης H του K που διέρχεται από το x .

Θέμα 3 (α) (i) Δώστε τον ορισμό του ακραίου υποσυνόλου ενός κυρτού υποσυνόλου του \mathbb{R}^n . Περιγράψτε όλα τα ακραία υποσύνολα ενος τετραέδρου του \mathbb{R}^3 .

(ii) Έστω $A \subseteq B \subseteq C \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτά. Υποθέτουμε ότι το A είναι ακραίο υποσύνολο του B και το B είναι ακραίο υποσύνολο του C . Δείξτε ότι το A είναι ακραίο υποσύνολο του C .

(β) (i) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $K = \text{conv}A$ η κυρτή θήρη του A και $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f λαμβάνει μέγιστη τιμή στο K και έστω $M = \max\{f(x) : x \in K\}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in A$ ώστε $f(x) = M$.
(ii) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές κυρτό. Αν $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση δείξτε ότι υπάρχει ακραίο σημείο x του K ώστε $f(x) = \max\{f(x) : x \in K\}$.

Θέμα 4 (α) Έστω K κυρτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και θ θετικός πραγματικός αριθμός. Δείξτε ότι το σύνολο $L = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) < \theta\}$ είναι κυρτό. (Υπενθυμίζουμε ότι $d(x, K) = \inf\{d(x, y) : y \in K\}$).

(β) Έστω \mathcal{F} οικογένεια από $m \geq n+1$ κυρτά υποσύνολα του \mathbb{R}^n . Έστω ότι υπάρχει $\theta > 0$ ώστε για οποιαδήποτε $n+1$ από αυτά υπάρχει σημείο του \mathbb{R}^n που απέχει λιγότερο από θ από καθένα από αυτά τα $n+1$ κυρτά. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ που απέχει λιγότερο από θ από καθένα από τα m κυρτά της οικογένειας \mathcal{F} .