

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΚΥΡΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. (ΣΕΠΤΕΜ. 2003)

Θέμα 1 Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  κυρτή συνάρτηση.

- (α) Διατυπώστε τις ιδιότητες της αριστερής και δεξιάς παραγώγου της  $f$ .
- (β) Δείξτε ότι ο περιορισμός της  $f$  σε κάθε κλειστό γραμμικό διάστημα είναι Lipschitz.
- (γ) Αν υποθέσουμε ότι η  $f$  είναι άνω γραμμένη, δείξτε ότι η  $f$  είναι σταθερή.

Θέμα 2 (α) Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  και  $x \in \text{co} A$ . Δείξτε ότι το  $x$  είναι κυρτός συνδυασμός το πολύ  $n+1$  σημείων του  $A$ . (πλήρης απόδειξη)

(β) Έστω  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  κυρτό. Δείξτε ότι τα  $\text{Int} K$  και  $\overline{K}$  είναι κυρτά.

(γ) Έστω  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  κυρτό με  $\text{Int} K \neq \emptyset$ .

(i) Αν  $x \in K$  και  $y \in \text{Int} K$ , δείξτε ότι  $(x, y] \subseteq \text{Int} K$ .

(ii) Δείξτε ότι  $\overline{K} = \text{Int} K$ .

Θέμα 3 (α) Διατυπώστε δύο διαχωριστικά θεωρήματα κυρτών συνόλων.

(β) Έστω  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  κυρτό με  $\emptyset \neq \text{Int} K$ . Δείξτε τα παρακάτω:

(i)  $\bigcap \{ \lambda K : \lambda > 1 \} \subseteq \overline{K}$ , (ii)  $\overline{K} \subseteq \bigcup \{ \lambda \cdot \text{Int} K : \lambda > 1 \}$  (iii)  $\overline{K} = \bigcap \{ \lambda \cdot K : \lambda > 1 \}$

(γ) Έστω  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  κυρτό με  $\text{Int} K \neq \emptyset$ . Υποθέτουμε ότι υπάρχει  $x_0 \in \text{Ext} K$  ώστε το  $K$  να δέχεται μοναδικό υπερεπιπέδο στήριξης στο  $x_0$ , δηλαδή υπάρχει μοναδικό  $f$  γραμμικό συνάρτησης ώστε  $f(x_0) = \sup \{ f(x) : x \in K \}$ . Αν  $y \in \mathbb{R}^n$  με  $f(y) < f(x_0)$ , δείξτε ότι  $[x_0, y] \cap \text{Int} K \neq \emptyset$ .

Θέμα 4 (α) Δώστε τους ορισμούς του ακραίου σημείου και του ακραίου υποσυνόλου ενός κυρτού  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ .

(β) Βρείτε τα ακραία σημεία της μοναδιαίας μπάλας του  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ .

(γ) Ένα σημείο  $x_0$  ενός κυρτού  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  καλείται εκτεθειμένο σημείο του  $K$ , αν υπάρχει  $H$  υπερεπιπέδο στήριξης του  $K$  στο  $x_0$ , ώστε  $H \cap K = \{x_0\}$ . (i) Δείξτε ότι κάθε εκτεθειμένο σημείο του  $K$  είναι και ακραίο σημείο του. Ισχύει το αντίστροφο;

(ii) Βρείτε τα εκτεθειμένα σημεία της μοναδιαίας μπάλας του  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ .

(iii) Έστω  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  κυρτό και  $x_0 \in K$  ώστε  $\|x_0\|_2 = \max \{ \|x\|_2 : x \in K \}$ .

Δείξτε ότι το  $x_0$  είναι εκτεθειμένο σημείο του  $K$ .

(iv) Δείξτε ότι κάθε συμπαγές κυρτό υποσύνολο του  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ , έχει ταλάχιστον ένα εκτεθειμένο σημείο.

Καλή επιτυχία!