

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΚΥΡΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ 10/2/2005

Θέμα 1. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ ώστε $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Δείξτε ότι

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

(β) Χρησιμοποιώντας την παραπόνω ανισότητα και κατάλληλη f (να δικαιολογήσετε την κυρτότητά της) δείξτε ότι

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

όπου x_1, \dots, x_n θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

(γ) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση.

(i) Είναι η f παραγωγισμή; (ii) Είναι η f συνεχής;

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Τι γνωρίζετε για την παραγωγισμότητα κυρτών συναρτήσων από το \mathbb{R} στο \mathbb{R} ;

Θέμα 2. (α) Έστω x_1, x_2, \dots, x_k σημεία του \mathbb{R}^N όπου $k \geq N+2$. Δείξτε ότι υπάρχει διαιρέσις του $\{1, \dots, k\}$ σε δύο μη κενά και ξένα υποσύνολά του I, J ώστε

$$\text{conv}\{x_i : i \in I\} \cap \text{conv}\{x_j : j \in J\} \neq \emptyset.$$

(β) Διατυπώστε τον ορισμό της κυρτής θήκης ενός υποσύνολου A του \mathbb{R}^N και δώστε τους δύο τρόπους περιγραφής της.

(γ) Έστω K κυρτό υποσύνολο του \mathbb{R}^N με $0 \in \text{Int}K$. Δείξτε ότι $x \in \text{Int}K$ αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda > 1$ ώστε $\lambda x \in K$.

Θέμα 3. (α) Δώστε τους ορισμούς του αφελού σημείου και του ακράδου υποσυνόλου ενός κυρτού. Διατυπώστε το θεώρημα Krein-Milman-Minkowski για συμπαγή κυρτά του \mathbb{R}^N .

(β) Έστω K υποσύνολο του \mathbb{R}^N κλειστό και $x_0 \notin K$. Έστω $y_0 \in K$ ώστε

$$\|x_0 - y_0\| = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in K\}.$$

Δείξτε ότι

(i) $\langle x_0 - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0$, $\forall y \in K$.

(ii) Έστω $u = x_0 - y_0$. Υπολογίστε ένα $\theta \in \mathbb{R}$ ώστε το $H_{u, \theta}$ να διαχωρίζει αυστηρά το x_0 το K , δηλαδή $H_{u, \theta} = \{x \in \mathbb{R}^N : \langle u, x \rangle = \theta\}$.

Θέμα 4. Έστω $n, k \in \mathbb{N}$ με $k \geq n+2$. Έστω I_1, \dots, I_k ευθύγραμμα τμήματα του \mathbb{R}^2 κάθετα στον άξονα των x τέτοια ώστε για οποιαδήποτε επιλογή $n+2$ ευθ. τμημάτων από τα I_1, \dots, I_k , υπάρχει πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ που η γραφική του παράσταση τέμνει όλα αυτά τα $n+2$ ευθ. τμήματα. Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ και η γραφική του παράσταση τέμνει όλα τα I_1, \dots, I_k .

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$