

Εξετάσεις Κυρτής Ανάλυσης, Φεβρουάριος 2004

- Θέμα 1 (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $r_1, \dots, r_n > 0$ τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^n r_i = 1$ και για κάθε x_1, \dots, x_n στο \mathbb{R} ισχύει ότι $f(\sum_{i=1}^n r_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n r_i f(x_i)$.
(β) Έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή ώστε το I να είναι φραγμένο διάστημα. Δείξτε ότι η f είναι κάτω φραγμένη.

- Θέμα 2 (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Δώστε τον ορισμό της κυρτής θήκης $conv A$ του A και διατυπώστε το θεώρημα του Καραθεοδωρή.
(β) Αν A ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n δείξτε ότι και το $conv A$ είναι ανοιχτό.
(γ) Έστω K κυρτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n ώστε $0 \in Int K$. Δείξτε ότι $\bar{K} = \cap \{\lambda K : \lambda \geq 1\}$.

- Θέμα 3 (α) Δώστε τους ορισμούς του ακραίου σημείου και του ακραίου υποσυνόλου ενός κυρτού. Διατυπώστε το θεώρημα Krein-Milman-Minkowski.
(β) Έστω $\|\cdot\|$ μία νόρμα στον \mathbb{R}^n . Δείξτε ότι η μοναδιαία σφαίρα $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ είναι κυρτό σύνολο και ότι $Ext(B) \neq \emptyset$. Αν $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ βρείτε τα ακραία σημεία της B .
(γ) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές κυρτό.
(i) Αν $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in Ext(K)$ ώστε $f(x_0) = \max\{f(x) : x \in K\}$.
(ii) Έστω $L \subseteq K$ κλειστό με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση υπάρχει $x_0 \in L$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \max\{f(x) : x \in K\}$. Δείξτε ότι $Ext(K) \subseteq L$. (Τπόδειξη: Θεωρείστε γνωστό ότι η κυρτή θήκη συμπαγούς είναι συμπαγές).

- Θέμα 4 (α) Δείξτε ότι κάθε μη κενό, κλειστό και κυρτό γνήσιο υποσύνολο K του \mathbb{R}^n είναι η τομή όλων των κλειστών ημιχώρων που το περιέχουν.
(β) (i) Διατυπώστε το θεώρημα Helly.
(ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ θέτουμε $\bar{x} = (x, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$,
 $H_{\bar{x}}^- = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle z, \bar{x} \rangle < 0\}$ και $H_{\bar{x}}^+ = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle z, \bar{x} \rangle > 0\}$.
Έστω A, B πεπερασμένα υποσύνολα του \mathbb{R}^n και $\mathcal{F} = \{H_{\bar{x}}^- : x \in A\} \cup \{H_{\bar{y}}^+ : y \in B\}$. Δείξτε ότι τα A, B διαχωρίζονται γνήσια αν και μόνο αν $\cap \mathcal{F} \neq \emptyset$.
(iii) Έστω A, B πεπερασμένα υποσύνολα του \mathbb{R}^n με την εξής ιδιότητα: Αν $\Gamma \subseteq A \cup B$ με $n + 2$ το πολύ στοιχεία τότε τα $\Gamma \cap A$ και $\Gamma \cap B$ διαχωρίζονται γνήσια. Δείξτε ότι τότε τα A, B διαχωρίζονται γνήσια.