

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΚΥΡΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ 17-2-2003

Θέμα 1. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή και $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε το x_0 είναι θέση τοπικού ελαχίστου της f . Δείξτε ότι το x_0 είναι θέση ολικού ελαχίστου και ότι η f είναι φθίνουσα αριστερά του x_0 και αύξουσα δεξιά του x_0 .
 (β) Εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή ώστε $f(x) \leq \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Θέμα 2. (α) Έστω A, B υποσύνολα του \mathbb{R}^n κυρτά, μη κενά, ξένα μεταξύ τους ώστε το A είναι ανοιχτό και $A \cup B = \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το A είναι ανοιχτός ημίσωρος του \mathbb{R}^n .
 (β) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό ώστε $0 \in \text{int}K$. Δείξτε ότι $\bigcup_{\lambda \in (0,1)} \lambda K = \text{int}K$.

Θέμα 3. (α) Δώστε τον ορισμό του ακραίου σημείου ενός κυρτού υποσυνόλου του \mathbb{R}^n . Αν

$$K = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\} \leq 1\}$$

δείξτε ότι το K είναι κυρτό και βρείτε τα ακραία σημεία του.

(β) Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές και κυρτό. Θέτουμε $a = \sup\{f(x) : x \in K\}$. Δείξτε ότι

- (i) Το σύνολο $F = \{x \in K : f(x) = a\}$ είναι μη κενό, κυρτό και συμπαγές.
- (ii) Το F είναι ακραίο υποσύνολο του K .
- (iii) Το F περιέχει ακραίο σημείο του K .

Θέμα 4. (α) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό, κυρτό, $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, $y \in K$. Δείξτε ότι $d(x, K) = d(x, y)$ αν και μόνο αν $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$ για κάθε $z \in K$. Ποιά η γεωμετρική ερμηνεία του δεύτερου σκέλους της ισοδυναμίας;

(β) Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και κυρτό. Αν $u \in \mathbb{R}^n$ και $a \in \mathbb{R}$ θέτουμε $S(K, u, a) = \{x \in K : \langle u, x \rangle > a\}$ (δηλαδή το $S(K, u, a)$ είναι η τομή ενός ανοιχτού ημίσωρου του \mathbb{R}^n με το K). Αν x_0 είναι ένα ακραίο σημείο του K , δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν u και a ώστε $x_0 \in S(K, u, a)$ και $\text{diam}S(K, u, a) < \varepsilon$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !