



Α) Για την εκτίμηση των πηδωτέρων ενός είδους γούστου σε κίνδυνο προς εξαφάνιση, 10 γούστα συλλαμβάνονται, σημαδεύονται και αφήνονται να ζανα-αναμιχθούν με τον υπόλοιπο πηδωτόμο. Αφούτερα, 20 γούστα του ίδιου είδους ζανα-συλλαμβάνονται. Έστω ότι 4 από τα 20 είναι σημαδεύμένα.

α) Έστω n το άγνωστο μέγεθος του πηδωτέρου (Αρα υπάρχουν 10 σημαδεύμένα και $n-10$ απημεδέμενα.) Υποθέστε ότι τα 20 γούστα ζανα-συλλαμβάνονται κατά τυχαίο τρόπο (δηλαδή κάθε ομάδα 20 γούστων έχει την ίδια πιθανότητα να αποτερέσει το συζητηθέν δείγμα). Αν $L(n)$ είναι η πιθανότητα να υπάρχουν 4 σημαδεύμένα από τα 20, να γράψετε τον τύπο για το $L(n)$

β) Στην ορολογία της μεθόδου μέγιστης πιθανοζάνειας πώς γράφεται το $L(n)$;

γ) Εκτιμήστε το μέγεθος του πηδωτέρου με την μέθοδο μέγιστης πιθανοζάνειας.

(Υπόδειξη: Γράψτε τον λόγο $\frac{L(n)}{L(n-1)}$ και βρείτε συνθήκη για να είναι ο λόγο μεγαλύτερος του 1). [2]

2^ο) Μια βιομηχανία χρησιμοποιεί μηχανήματα που κόβει μεταρμηές πλάκες.

Έστω μ_0 ο μέσος αριθμός πηακών που κόβει η μηχανή ανά ώρα (το μ_0 είναι γνωστό). Θέλει στην αγορά υπάρχει ένα νέο μηχανήματα κοπής πηακών και στην βιομηχανία σκέπτονται αν πρέπει ν' αντικαταστήσουν το παλιό τους μηχανήματα. Θέλουν να ελέγξουν την υπόθεση $H_0: \mu = \mu_0$ όπου μ είναι ο μέσος αριθμός πηακών που κόβει ~~ανά~~ ανά ώρα το νέο μηχανήματα (μ είναι άγνωστο) έναντι μιας εναλλακτικής υπόθεσης. Ποια πρέπει να είναι η εναλλακτική αν

α) Δεν θέλουν να αντικαταστήσουν το μηχανήματα τους εκτός και αν υπάρχει ισχυρή ένδειξη ότι το νέο μηχανήματα είναι αποδοτικότερο

β) Θέλουν ν' αγοράσουν το νέο μηχανήματα (επειδή έχει επί ηζών επιδομητές ιδιότητες) εκτός αν υπάρχει ισχυρή ένδειξη ότι είναι γρότερο αποδοτικό.

γ) Για κάθε μία από τις περιπτώσεις α), β) τι πρέπει να κάνουν αν απορρίψει η μηδενική υπόθεση; Να αγοράσουν ή όχι το νέο μηχανήματα;

δ) Έστω ότι $\mu_0 = 9,5$ και αποχαιρέται ότι θα ερξεί $H_0: \mu = 9,5$ έναντι $H_1: \mu > 9,5$, σε επίπεδο $\alpha = 0,05$. Αποφασίζει ένα νέο μηχανήμα και το δοκιμάζει για 50 διασκευατά μιας ώρας. Ο δειγματικός μέσος είναι $\bar{X} = 9,8$ και η δειγματική τυπική απόκλιση είναι $s = 1,095$.

(i) Γράψτε το στατιστικό ερέχσον

ii) Γράψτε το πεδίο απόρριψης

iii) Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση;

iv) Για το συγκεκριμένο πεδίο απόρριψης που γράψατε στο (ii) βρείτε την πιθανότητα σφάλματος τύπου II αν $\mu = 10$. (4)

3) Με βάση τ.δ. x_1, x_2, \dots, x_n από τυχαίο $X \sim f(x, \theta) = \frac{\alpha}{\theta} x^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{\theta} x^\alpha}$,

$x > 0$ όπου $\theta > 0$ άγνωστο παράμετρο και $\alpha > 0$ γνωστή σταθερά

α) Να εκτιμήσετε με την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας την παράμετρο θ .

β) Να ελέγξετε αν η ε.μ.π. που βρήκατε στο α) είναι αμερόμηστη για την παράμετρο θ .

γ) Με τη βοήθεια του θεωρ. Rao-Blackwell και όποιων άλλων θεωρημάτων είναι απαραίτητα να υποδείξετε ΟΑΕΔ για την παράμετρο θ .

δ) Να βρείτε το καλύτερο γράμμα Cramer-Rao

και να το συγκρίνετε με την διασπορά της ΟΑΕΔ του ερωτ. γ).