

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1:

- A) i) Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από το στατιστικό μοντέλο $\{X, \mathcal{X}, p(x|\theta), \theta \in \Theta\}$. Να δώσετε τον ορισμό και δύο παραδείγματα μιας δειγματοσυνάρτησης.
ii) Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από το στατιστικό μοντέλο $\{X, \mathcal{X}, p(x|\theta), \theta \in \Theta\}$. Να δώσετε τον ορισμό μιας επαρκούς δειγματοσυνάρτησης για την παράμετρο θ .
iii) Να εξετάσετε αν η Κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, όπου μ, σ άγνωστες παράμετροι, ανήκει στην πολυπαραμετρική Εκθετική οικογένεια και σε συνεχεία για τυχαίο δείγμα X_1, \dots, X_n να βρεθεί επαρκής δειγματοσυνάρτηση για το $\theta = (\mu, \sigma^2)$.
- B) Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την Ομοιόμορφη κατανομή $U(\theta_1 - \theta_2, \theta_1 + \theta_2)$, όπου θ_1, θ_2 άγνωστες παράμετροι. Να βρεθούν οι εκτιμήτριες των θ_1 και θ_2 με την μέθοδο των ροπών.

ΘΕΜΑ 2:

- Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την Εκθετική κατανομή $E\theta(1/\theta)$, όπου θ άγνωστη ποσότητα.
- i) Να δείξετε ότι ο δειγματικός μέσος \bar{X} είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του θ .
ii) Αν $Y = \min\{X_i\}$, να δείξετε ότι η δειγματοσυνάρτηση $Z = nY$ είναι επίσης αμερόληπτη εκτιμήτρια του θ .
iii) Με την βοήθεια του Θεωρήματος Rao-Blackwell να αποφανθείτε ποια από τις παραπάνω δύο εκτιμήτριες είναι A.E.E.D. του θ .

ΘΕΜΑ 3:

- Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την κατανομή με σ.π.π. $f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1}$, $x \in (0, 1)$ όπου $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρος.
- i) Να βρεθεί η EMPI του θ .
ii) Να υπολογιστεί το Cramer-Rao κατώτατο φρόγμα διασποράς μιας εκτιμήτριας της ποσότητας $\alpha(\theta) = 1/\theta$.
iii) Με τη βοήθεια του Θεωρήματος Cramer-Rao να αποδείξετε ότι η EMPI της ποσότητας $\alpha(\theta) = 1/\theta$ είναι ΑΕΕΔ. Δίνεται ότι η δειγματοσυνάρτηση $Y = -2\theta \ln X_i \sim \chi^2_2$.

ΘΕΜΑ 4:

- Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την κατανομή με σ.π.π. $f(x; \theta) = \theta(1-x)^{\theta-1}$, $x \in (0, 1)$ όπου $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρος.
- i) Αποδείξτε ότι η $T = \sum_1^n \ln(1-X_i)$ είναι επαρκής δειγματοσυνάρτηση του θ .
ii) Αποδείξτε ότι η $Y_i = -2\theta \ln(1-X_i) \sim E\theta(1/2)$.
iii) Κατασκευάστε ένα 95% Δ.Ε. για το θ .
Δίνεται ότι $X_n^2 = G(1/2, n/2)$.

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ½ h

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ