

**ΤΕΜΦΕ**

**ΕΞΑΜΗΝΟ: 4ο**

**ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

1. Έστω τ.δ.  $x_1, \dots, x_n$  από πληθυσμό  $X$  με σ.π.π.  $p(x, \theta) = \theta x^{\theta-1}$  όταν  $0 < x < 1$  και μηδέν αλλού, όπου  $\theta > 0$  άγνωστη παράμετρος.

α) Βρείτε την ε.μ.π. της παραμέτρου  $\theta$ .

β) Βρείτε την ε.μ.π. της παραμέτρου  $\alpha(\theta) = 1/\theta$ .

γ) Εξετάσετε αν η σ.σ που βρήκατε στο β) είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου  $1/\theta$ . Είναι Ο.Α.Ε.Δ.;

2. (Α) Έστω τ.δ.  $t_1, t_2, \dots, t_n$  από τον πληθυσμό  $T$  με σ.π.π.  $f(t) = \theta e^{-\theta t}$ ,  $t > 0$ , όπου  $\theta > 0$  άγνωστη παράμετρος. Κατασκευάστε προσεγγιστικό δ.ε. βαθμού  $\gamma = 1 - \alpha$  για την παράμετρο  $\theta$ . Εφαρμογή:  $n = 100$ ,  $\sum_{i=1}^{100} t_i = 200000$ ,  $\gamma = 0.98$ .

(Β) Δείξτε το ακόλουθο: Αν η σ.σ.  $t$  είναι επαρκής για την παράμετρο  $\theta$  και η συνάρτηση  $h$  είναι 1-1, τότε η  $u = h(t)$  είναι επαρκής για την παράμετρο  $\theta$ .

3. (Α) Έστω ότι το μέγεθος  $X \sim N(\theta, 4)$ . Με βάση τις παρατηρήσεις  
39 42 42 43 38 44 38 43 45 41 41 44

(α) Να εκτιμήσετε την παράμετρο  $\theta$ .

(β) Να εκτιμήσετε την  $\alpha(\theta) = P(X > 40)$ .

(γ) Να εκτιμήτε εκ νέου την  $\theta$  αν είναι γνωστό μόνο το πλήθος των παρατηρήσεων που υπερβαίνουν το 40.

(Β) Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τ.δ. από πληθυσμό  $X$  με  $E(X) = \theta$  και  $V(X) = \sigma_1^2$  και  $Y_1, \dots, Y_n$  τ.δ. από πληθυσμό  $Y$  με  $E(Y) = \theta$  και  $V(Y) = \sigma_2^2$ . Έστω  $c \in [0, 1]$  και  $U = c \bar{X} + (1-c) \bar{Y}$ . Δείξτε ότι η  $U$  είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου  $\theta$ . Για ποια τιμή του  $c$  η διασπορά της  $U$  είναι ελάχιστη;

4. (Α) Το βάρος ανά τεμάχιο ενός προϊόντος είναι  $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  όταν προέρχεται από τη μονάδα  $A$  και  $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  όταν προέρχεται από τη μονάδα  $B$ . 8 παρατηρήσεις του  $X_1$  και 10 παρατηρήσεις του  $X_2$  έδωσαν  $\bar{X}_1 = 35$ ,  $\bar{X}_2 = 31$ ,  $S_1^2 = 2.8$  και  $S_2^2 = 3.2$ .

(α) Να ελεγχθεί η υπόθεση  $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$  κατά της  $H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$  ( $\alpha = 0.98$ ).

(β) Να ελεγχθεί ο ισχυρισμός ότι το βάρος των προϊόντων των παραγόμενων από την  $A$  υπερβαίνει κατά δύο μονάδες αυτό των παραγόμενων από τη  $B$ , τυχαίο  $A$   
τουλάχιστον

(Β) Στο γραμμικό μοντέλο  $y = \alpha x$  να εκτιμηθεί η παράμετρος  $\alpha$  με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.