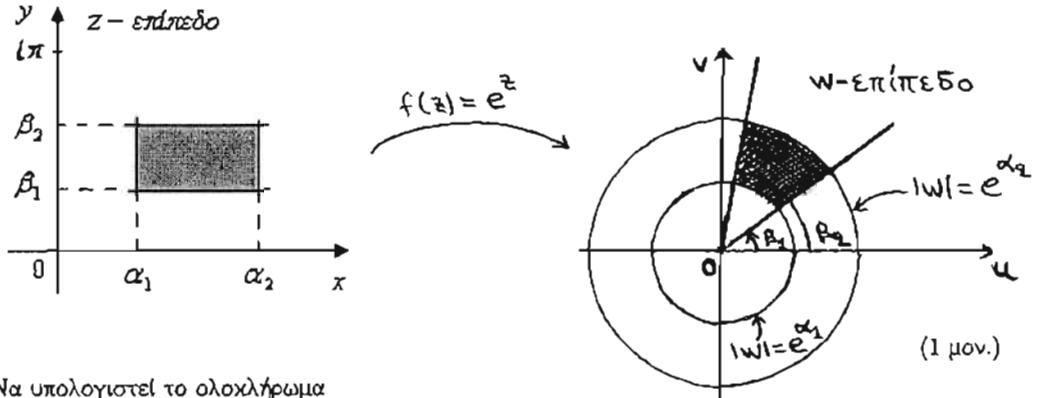


**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΤΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**  
**Επαναληπτικές Εξετάσεις στη Μιγαδική Ανάλυση**

6 Οκτωβρίου, 2006

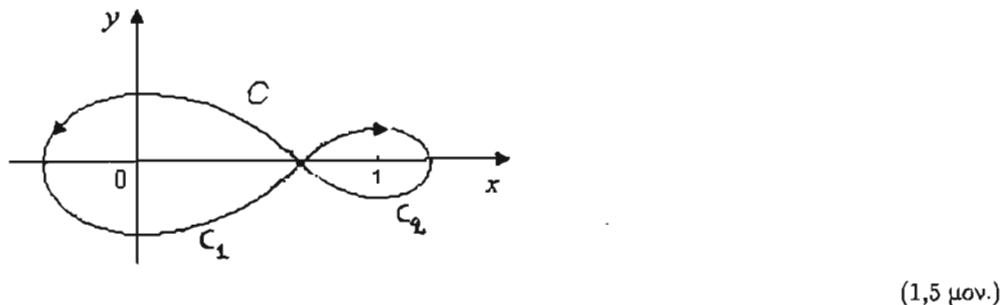
Θέμα 1. (α') Βρείτε την εικόνα του γραμμοσκιασμένου χωρίου του  $z$ -επιπέδου μέσω του μετασχηματισμού  $f(z) = e^z$ . Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



(β') Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_C \frac{8z - 3}{z^2 - z} dz,$$

όπου  $C$  η καμπύλη του σχήματος.



Λύση.

(α') Ως γνωστόν, ο περιορισμός της  $f(z) = e^z$  στη θεμελιώδη λωρδα

$$-\infty < x < \infty, \quad -\pi < y \leq \pi$$

είναι αφιφονοσήμαντη απεικόνιση. Οι καταχόριψες ευθείες  $x = \alpha_1$  και  $x = \alpha_2$  απεικονίζονται στους κύκλους  $|w| = e^{\alpha_1}$  και  $|w| = e^{\alpha_2}$  αντίστοιχα, ενώ οι οριζόντιες ευθείες  $y = \beta_1$  και  $y = \beta_2$  απεικονίζονται στις ημιευθείες  $\text{Arg } w = \beta_1$  και  $\text{Arg } w = \beta_2$  αντίστοιχα. Επομένως, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του  $z$ -επιπέδου απεικονίζεται στο γραμμοσκιασμένο χωρίο του  $w$ -επιπέδου.

(β') (1ος τρόπος) Η καμπύλη  $C$  είναι η ένωση των απλών κλειστών και λείων καμπυλών  $C_1$  και  $C_2$ ,

όπου η  $C_1$  είναι θετικά προσανατολισμένη και η  $C_2$  είναι αρνητικά προσανατολισμένη. Επομένως,

$$\begin{aligned} I &= \int_{C_1} \frac{8z-3}{z^2-z} dz - \int_{C_2^-} \frac{8z-3}{z^2-z} dz \\ &= \int_{C_1} \frac{\frac{8z-3}{z-1}}{z} dz - \int_{C_2^-} \frac{\frac{8z-3}{z}}{z-1} dz \\ &= 2\pi i \left. \frac{8z-3}{z-1} \right|_{z=0} - 2\pi i \left. \frac{8z-3}{z} \right|_{z=1} \quad (\text{από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy}) \\ &= 6\pi i - 10\pi i = -4\pi i. \end{aligned}$$

(2ος τρόπος) Επειδή

$$\frac{1}{z^2-z} = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z},$$

είναι

$$\begin{aligned} I &= \int_C \frac{8z-3}{z-1} dz - \int_C \frac{8z-3}{z} dz \\ &= -2\pi i (8z-3)|_{z=1} - 2\pi i (8z-3)|_{z=0} \quad (\text{από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy}) \\ &= -10\pi i + 6\pi i = -4\pi i. \end{aligned}$$

(3ος τρόπος) Τα σημεία  $z=0$  και  $z=1$  είναι απλοί πόλοι της συνάρτησης  $f(z) = \frac{8z-3}{z^2-z}$  και ως γνωστόν

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{8z-3}{z(z-1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{8z-3}{z-1} = 3,$$

$$\text{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{8z-3}{z(z-1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{8z-3}{z} = 5.$$

Επομένως, από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολογίων έχουμε

$$I = 2\pi i \text{Res}(f, 0) - 2\pi i \text{Res}(f, 1) = 6\pi i - 10\pi i = -4\pi i.$$

■  
Θέμα 2. (α') Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα του Liouville. (1 μον.)

(β') Υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι ακεραία συνάρτηση και ότι  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ . Δείξτε ότι  $f(z) = 0$ , για κάθε  $z \in \mathbb{C}$ . (1,5 μον.)

Απόδειξη.

(α') Για τη διατύπωση και την απόδειξη του θεωρήματος του Liouville παραπέμπουμε στο βιβλίο του Δ.Χ. Κραββαρίτη "εφαρμοσμένη μαγανική ανάλυση" (Θεώρημα 6.8.2, σελίδα 176).

(β') Επειδή  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ , υπάρχει  $R > 0$  τέτοιο ώστε  $|f(z)| < 1$ , για κάθε  $|z| > R$ . Εξάλλου, επειδή η  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο συμπαγές σύνολο  $K = \{z : |z| \leq R\}$ , η  $f$  θα είναι φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει  $M > 0$  τέτοιο ώστε  $|f(z)| \leq M$ , για κάθε  $|z| \leq R$ . Επομένως, έχουμε

$$|f(z)| < M+1, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Η  $f$  λοιπόν είναι μία ολόμορφη και φραγμένη συνάρτηση στο  $\mathbb{C}$ . Άρα, από το θεώρημα του Liouville η  $f$  είναι σταθερή συνάρτηση. Όμως από την υπόθεση είναι  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$  και αυτό συνεπάγεται ότι  $f(z) = 0$ , για κάθε  $z \in \mathbb{C}$ .

Θέμα 3. (α') Βρείτε τους πόλους των παρακάτω συναρτήσεων και προσδιορίστε την τάξη τους

$$(i) \frac{1}{z^2 \sin z}, \quad (ii) \frac{1}{1 + e^z}, \quad (iii) \frac{\sin z}{z^2 - z}.$$

(1 μον.)

(β') Να βρεθεί το ανάπτυγμα σε σειρά Laurent της συναρτησης

$$f(z) = \frac{1}{z-a}, \quad |z| > |a|,$$

όπου  $a \in \mathbb{R}$  με  $|a| < 1$ . Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα αυτό δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\theta = \frac{a \cos \theta - a^2}{1 - 2a \cos \theta + a^2}.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α') (i) Αν  $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$ , το 0 είναι ρίζα τάξης 3 της  $\frac{1}{f(z)} = z^2 \sin z$  και επομένως το 0 είναι πόλος τάξης 3 της  $f$ . Τα  $z_k = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \neq 0$ , είναι απλοί πόλοι της  $f$  επειδή είναι απλές ρίζες της  $1/f$ .

(ii) Έστω  $g(z) = \frac{1}{1 + e^z}$ . Επειδή

$$1 + e^z = 0 \Leftrightarrow e^z = -1 \Leftrightarrow e^z = e^{i\pi} \Leftrightarrow e^{z-i\pi} = 1 \Leftrightarrow z - i\pi = 2k\pi \Leftrightarrow z = (2k+1)i\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

τα  $z_k = (2k+1)i\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , είναι απλοί πόλοι της  $g$  επειδή είναι απλές ρίζες της  $1/g$ .

(iii) Αν  $h(z) = \frac{\sin z}{z^2 - z}$ , το 1 είναι απλή ρίζα της  $\frac{1}{h(z)} = \frac{z^2 - z}{\sin z}$  και επομένως το 1 είναι απλός πόλος της  $h$ . Επειδή

$$\lim_{z \rightarrow 0} h(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z^2 - z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{2z - 1} = -1,$$

το 0 είναι αιρόμενο ανώμαλο σημείο της  $h$ .

(β') Βλέπε Παράδειγμα 8.1.3 στο βιβλίο του Δ.Χ. Κραββαρίτη "εφαρμοσμένη μιγαδική ανάλυση", σελίδα 231.

■

Θέμα 4. (α') Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + x \sin x}{x^2 + 1} dx.$$

(1,5 μον.)

(β') Να βρεθεί ένας μετασχηματισμός Möbius  $w = f(z)$  που να απεικονίζει το ημερήπεδο  $\text{Im } z > \text{Re } z$  στο εσωτερικό του κύκλου  $|w - 1| = 3$ . (1 μον.)

Λύση.

(α') Είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + x \sin x}{x^2 + 1} dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx}_{J_1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx}_{J_2},$$

δποι τα γενικευμένα ολοκληρώματα  $I_1$  και  $I_2$  συγχλίνουν. Παρατηρούμε ότι

$$I_1 = \operatorname{Re} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{x^2 + 1} dx \right) \quad \text{και} \quad I_2 = \operatorname{Im} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{iz}}{x^2 + 1} dx \right).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$ . Το  $z = i$  είναι ο μοναδικός πόλος της  $f$  που βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο. Επειδή το  $z = i$  είναι απλός πόλος,

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)'} \Big|_{z=i} = \frac{e^{iz}}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Επομένως

$$I_1 = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση  $g(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1}$ . Το  $z = i$  είναι ο μοναδικός πόλος της  $g$  που βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο. Επειδή το  $z = i$  είναι απλός πόλος,

$$\operatorname{Res}(g, i) = \frac{ze^{iz}}{(z^2 + 1)'} \Big|_{z=i} = \frac{ze^{iz}}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2}.$$

Επομένως

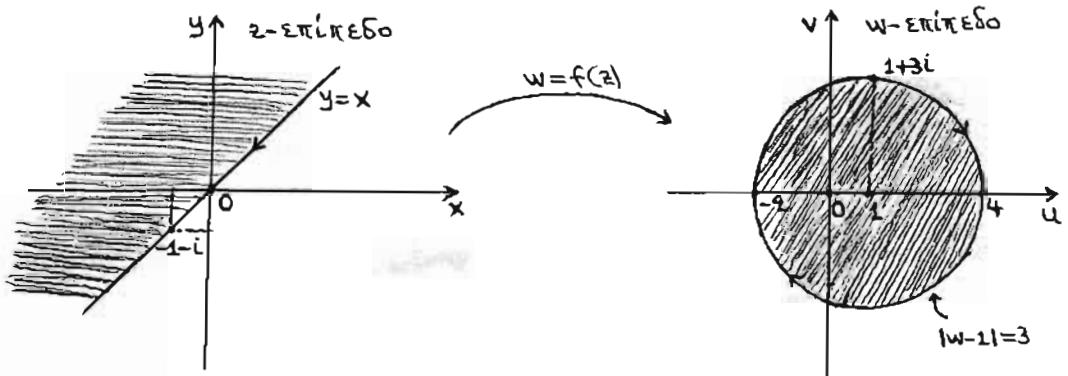
$$I_2 = \operatorname{Im} \left( 2\pi i \frac{e^{-1}}{2} \right) = \frac{\pi}{e}.$$

Άρα,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e} + \frac{\pi}{e} = \frac{2\pi}{e}.$$

(β') Αρχεί να βρεθεί ο μετασχηματισμός Möbius  $w = f(z)$  που απεικονίζει τα σημεία  $\infty, 0$  και  $-1-i$  της ευθείας  $y = x$  στο  $z$ -επίπεδο, στα σημεία  $1+3i, 4$  και  $-2$  αντίστοιχα του κύκλου  $|w - 1| = 3$  στο  $w$ -επίπεδο. Δηλαδή,

$$(w, 1+3i, 4, -2) = (z, \infty, 0, -1-i) \Leftrightarrow \frac{[w - (1+3i)](4+2)}{(w+2)[4 - (1+3i)]} = \frac{1+i}{z+1+i} \Leftrightarrow w = \frac{(1+3i)z+4i}{z+i}.$$



Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες