



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΘΕΜΑΤΑ

23/10/02

ΘΕΜΑ 1^ο (i) Να εξετάσετε αν υπάρχει ολόμορφη συάρτηση $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ στο \mathbb{C} με (a) $u(x,y) = e^{-x} (x \sin y - y \cos y)$ και (b) $u(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy$. Σε παταραγή θ εφεύρετε μια τέτοια f .

(MON. 3^ο) (ii) Βρείτε το μετασχηματικό Möbius $w=f(z)$ που απεικονίζει το δίσκο $|z| \leq 1$ στο ημιεπίπεδο $Re(w) \leq 0$ και τα σημεία $z_1 = 2+i$ και $z_2 = i$ στα σημεία $w_1 = 1+i$ και $w_2 = \infty$ κυρίως.

ΘΕΜΑ 2^ο Δίνεται η συάρτηση

$$f(z) = \frac{iz+z}{(z-1)(z+i)}$$

(a) Αναπτύξτε την f σε σειρά Taylor με κέντρο το -1 .

(b) Αναπτύξτε την f σε σειρά Laurent σε ένα δακτύλιο με κέντρο το $-i$.

Σε ιάδε ~~στη περιήγηση και παταβινεύσετε~~ ένα σχήμα για το πεδίο στο οποίο αναπτύξετε την f .

ΘΕΜΑ 3^ο (i) Η συάρτηση $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ είναι ολόμορφη στο $z_0 = x_0 + iy_0$ και $u_x(x_0, y_0) = \sqrt{2}$, $v_x(x_0, y_0) = -\sqrt{2}$. Υπολογίστε τους μιγαδικούς αριθμούς $\log f'(z_0)$.

(ii) Δίνεται η συάρτηση $f(z) = \frac{z-1}{z} \left(1 - \cos \frac{1}{z-1}\right)$.

(MON. 2, 3) (a) Βρείτε τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f και αιτιολογήστε το είδος τους.

(b) Υπολογίστε το ολογενήριμα $I = \oint_C f(z) dz$, όπου C είναι ο μίντας.

$$(1) |z-1| = \frac{1}{3}, (2) |z| = \frac{1}{2}, (3) |z| = \frac{3}{2} \text{ και } (4) |z-i| = \frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ 4^ο Να υπολογίσετε με τη δευτερία των ολογενηρωτικών υποδοτών ένα μόνο από τα παρακάτω ολογενηρώματα

$$(MON. 2) I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+16} dx, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \vartheta}{2+\cos \vartheta} d\vartheta.$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.