

ΓΡΑΠΤΗ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ
ΣΤΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗΘΕΜΑΤΑ

- ΘΕΜΑ 1^ο (i) Η συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ είναι διαφορίσιμη στο $z_0 = x_0 + iy_0$ και $u_x(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0) = -\sqrt{3}$. Να υπολογίσετε τους μιγαδικούς αριθμούς $\log f'(z_0)$.
- (μον. 1)
- (ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει, ολόμορφη συνάρτηση $f(z)$ στο \mathbb{C} με πραγματικό μέρος $u(x, y) = (x^2 - y^2)e^x \cos y - 2xye^x \sin y - x - y + 1$. Σε καταφικτική περίπτωση βρείτε μια τέτοια συνάρτηση f .
- (μον. 13)

- ΘΕΜΑ 2^ο (i) Βρείτε τους πέντε πρώτους όρους του αναπτύγματος της συνάρτησης $\frac{\sin z}{e^z}$ σε σειρά Taylor με κέντρο το μηδέν.
- (μον. 1, 2)
- (ii) Αναπτύξτε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{iz}{(z-i)(z-2i)}$ σε σειρά Laurent γύρω στα κεντρικά:
- (μον. 1, 5)
- $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-2i| < 1\}$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-2i| > 1\}$.
Ποιό είναι το $\text{Res } f(z)$;
- ΘΕΜΑ 3^ο Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{1 - \cos \frac{1}{z-1}}{z}$.

- (i) Βρείτε τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f και αιτιολογίστε το είδος τους.
- (ii) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\oint_C f(z) dz$, όπου C είναι ο κύκλος:
- (μον. 17)
- (α) $|z| = \frac{1}{2}$ (β) $|z| = 2$ και (γ) $|z-i| = \frac{1}{2}$.

- ΘΕΜΑ 4^ο Υπολογίστε με τη θεωρία των ολοκληρωτικών υπολοίπων το ολοκλήρωμα:
- (μον. 1, 5)
- $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 2} dx.$$

- ΘΕΜΑ 5^ο Να βρείτε το μετασχηματισμό Möbius που απεικονίζει τον κύκλο $|z|=2$ του z -επιπέδου στην ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες του 2^{ου} και 4^{ου} τεταρτηγώνιου του w -επιπέδου και τα σημεία $2-2i$ και $2+i$ του z -επιπέδου στα σημεία i και $3-2i$ αντίστοιχα του w -επιπέδου.
- (μον. 1, 8)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ώρες
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!