

1) ~~Έστω~~ Έστω $u(x,y)$ μια αρμονική συνάρτηση ορισμένη στο αλλά
ευνόητο ηδίο D . Δείξτε ότι υπάρχει συγκριτική της $u(x,y)$.

~~Να βρεθεί ολόμορφη συνάρτηση $f(z) = u(x,y) + iu(x,y)$ τέτοια, ώστε~~
 $u(x,y) = -e^x \sin y + \frac{y^2 - x^2}{2}$, $f(0) = 2$.

2) a) Έστω n ακέραιος και C ο κύκλος $|z - z_0| = r$. Δείξτε ότι

$$\int_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ 2\pi i r^2, & n = 1. \end{cases}$$

b) Ο μετασχηματισμός Möbius $w = f(z)$ οντικοποιεί την ευθεία $\operatorname{Re}z = \operatorname{Im}z$ στο μοναδιαίο κύκλο $|w| = 1$ με $f(1) = \infty$. Να βρεθεί το $f(i)$.

3) a) Έστω $f(z) = \frac{e^z}{z}$, $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1$. Να βρεθεί η φύση και
η στάχτη της τιμής του $|f(z)|$ και τα εμφατικά γεγονότα παραβολικής
οι τιμές αυτές.

b) Η συνάρτηση $f(z)$ είναι ολόμορφη και μη σταθερή στο θεατρικό
ηδίο D και ευεξίς στο \bar{D} . Αν $f(z) = c$ στο εύνοερό ∂D του D ,
τότε η $f(z)$ έχει τουλάχιστον μια είσα c στο D .

4) a) Η συνάρτηση $f(z)$ είναι ολόμορφη στο C και η παραγωγή¹
 $f'(z)$ είναι ημίσημη στο C . Δείξτε ότι

$$f(z) = az + b, \quad a, b \in C \text{ σταθεροί}$$

b) Να υπολογιστεί το αλογονίδιο

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$