Θέμα 1α Αφού για το σωματίδιο ισχύει $v = v_g$, $p = \gamma m v$, όπου $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, $E = \hbar\omega$, όπου $v_g = d\omega/dk$, έπεται ότι

$$p = \gamma m \frac{d\omega}{dk} = \gamma \frac{m}{\hbar} \frac{dE}{dk} \qquad (1)$$

Αλλά $E = \gamma m c^2$, οπότε $p = \frac{\gamma m^2 c^2}{\hbar} \frac{d\gamma}{dk} = \frac{m^2 c^2}{2\hbar} \frac{d\gamma^2}{dk}$

ή $\gamma m v = \frac{m^2 c^2}{2\hbar} \frac{d(1-\beta^2)^{-1}}{dk} = \frac{m^2 c^2}{2\hbar} \frac{2\beta}{(1-\beta^2)^2} \frac{d\beta}{dk}$ ή

$$dk = \frac{mc}{\hbar} \frac{d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} \qquad (2)$$

Ολοκληρώνοντας την (2) (δόθηκε το ολοκλήρωμα)

$$k = \frac{mc}{\hbar} \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{+1/2}} + \text{σταθ.}$$

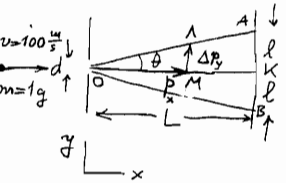
Αλλά για $\beta = 0$, είναι $k = 0 \Rightarrow$ σταθ. $= 0$, οπότε,

$$\hbar k = \beta \gamma m c = \gamma m v \quad \text{δηλ. } p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}.$$

Θέμα 1β

Υπολογισμός τάξης μεγέθους:

Μετά τη σχισμή, η δέσμη διασπείρεται κατακόρυφα, συμμετρικά ως προς την αρχική της διεύθυνση OK. Έστω L η απόσταση για την οποία το άπλωμα της δέσμης έχει γίνει



$$2l = 1\ \text{cm}. \qquad (1)$$

Λίγο μετά τη σχισμή, ένα σωματίδιο της δέσμης, ειδικά έχει μια αβεβαιότητα ύψους $\Delta y = d$ κατά την κατακόρυφη διεύθυνση, θα έχει και μιά συναφή αβεβαιότητα Δp_y στην y συνιστώσα της ορμής, και θα ισχύει

$$d \cdot \Delta p_y \geq \hbar \qquad (2)$$

Η Δp_y προκαλεί και την κατακόρυφη διασπορά της δέσμης. Τα ορθογώνια τρίγωνα OMΛ και OKA είναι όμοια $\Rightarrow \frac{\Lambda M}{OM} = \frac{AK}{OK} \Rightarrow \frac{\Delta p_y}{p_x} = \frac{l}{L}$ (3)

Είναι και $p = mv$ (μή σχετικιστικό) (4) και $p_x \simeq p$.

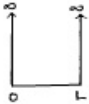
Οπότε (2)+(3)+(4) $\Rightarrow L = \frac{lp}{\Delta p_y} \cong \frac{lmv}{\hbar/d}$

$$L = \frac{ldmv}{\hbar} = \frac{(0{,}5\times10^{-2}\,m)(2\times10^{-3}\,m)(10^{-3}\,kg)(10^{2}\,m/s)}{1{,}055\times10^{-34}\,Js}$$

$\simeq 1{,}0\times10^{28}\,m$ > διάμετρο του ορατού Σύμπαντος!

Παρατήρηση: Το εύρος της διασποράς σε απόσταση L οφείλεται εκτός από την περίθλαση στη σχισμή εύρους d, και στο εύρος d της σχισμής. Έτσι, στο 2l από τις (2)+(3), $2l = 2L\hbar/pd$, πρέπει να προσθέσουμε και το d, δηλ. το κατακόρυφο εύρος της κηλίδας θα είναι $d + 2L\hbar/pd$. Αρκεστήκαμε πιο πάνω σε μιά εκτίμηση τάξης μεγέθους μόνο.

Θέμα 2ο



1α) Κανονικοποίηση της $\psi(x,t=0) = Ax(L-x)$

$$\int_0^L |\psi(x,t=0)|^2 dx = A^2\int_0^L x^2(L-x)^2 dx = A^2\int_0^L (L^2x^2 - 2Lx^3 + x^4)dx =$$

$$= A^2\left(L^2\frac{L^3}{3} - 2L\frac{L^4}{4} + \frac{L^5}{5}\right) = A^2\left(\frac{L^5}{3} - \frac{L^5}{2} + \frac{L^5}{5}\right) =$$

$$= A^2\left(\frac{10L^5}{30} - \frac{15L^5}{30} + \frac{6L^5}{30}\right) = A^2\frac{L^5}{30} = 1$$

$$\rightsquigarrow A = \sqrt{\frac{30}{L^5}} \quad \text{και} \quad \psi(x,t=0) = \sqrt{\frac{30}{L^5}}\, x(L-x)$$

2β) Αναμενόμενη μέση τιμή της ενέργειας του ατόμου

$$\langle E\rangle = \int_0^L \psi^*(x)\,\hat{E}\,\psi(x)\,dx \quad , \quad \hat{E} = \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \overset{0}{\hat{V}(x)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$$

οπότε $\langle E\rangle = \int_0^L \psi^*(x)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)\right)dx =$

$$= A^2\int_0^L x(L-x)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)x(L-x)\,dx =$$

$$= A^2\int_0^L (Lx-x^2)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(-2)\right)dx = A^2\int_0^L (Lx-x^2)\frac{\hbar^2}{m}dx =$$

$$= \frac{30}{L^5}\frac{\hbar^2}{m}L\int_0^L x\,dx - \frac{30}{L^5}\frac{\hbar^2}{m}\int_0^L x^2 dx = \dots = 5\frac{\hbar^2}{mL^2}$$

2γ) Η πιθανότητα εμφάνισης της ιδιοτιμής E_1 της θεμελιώδους στάθμης είναι: $P_1 = |C_1|^2$, $C_1 = \int_0^L \psi_1^*\psi\,dx$

και $\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi x}{L}$

$$C_1 = \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi x}{L}\sqrt{\frac{30}{L^5}}\,x(L-x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{L}}\sqrt{\frac{30}{L^5}}\int_0^L \sin\frac{\pi x}{L}x(L-x)dx =$$

$$= \frac{\sqrt{60}}{L^3}\int_0^L x\sin\frac{\pi x}{L}dx - \frac{\sqrt{60}}{L^3}\int_0^L x^2\sin\frac{\pi x}{L}dx =$$

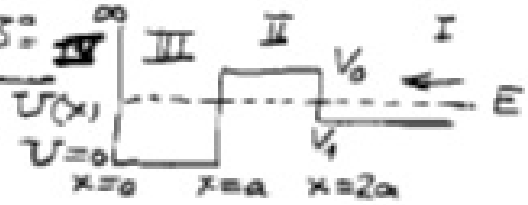
$$= \frac{\sqrt{60}}{L^3}\left(L\frac{L^2}{\pi} - \frac{L^3}{\pi} + \frac{4L^3}{\pi^3}\right) = \frac{4\sqrt{60}}{\pi^3}$$

$$P_1 = |C_1|^2 = \frac{16\cdot 60}{\pi^6} = \frac{960}{\pi^6} \simeq 0,998 = 99,8\%$$

Η πιθανότητα το άτομο κάθε m να βρίσκεται στη θεμελιώδη στάθμη είναι πολύ μεγάλη ~ 1 !

Θέμα 3ο:

α)



Η χρονοανεξάρτητη εξίσ. του Schrödinger

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(x)\right] u(x) = 0$$

δίνει για τις τρεις περιοχές:

I) $V(x) = V_1$, $E - V_1 > 0 \Rightarrow$ ταλαντώμενες λύσεις:

$$u_I(x) = A e^{-ikx} + B e^{+ikx}, \quad k = \sqrt{2m[E - V_1]}/\hbar$$

Η πλήρης κυμ/ση: $\psi_I(x,t) = u_I(x) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$

Ο α' όρος παριστάνει το κύμα του προσπίπτοντος σωματιδίου από δεξιά → αριστερά και ο 2ος το κύμα του ανακλώμενου σωματιδίου, δεξιά → αριστερά

II) Είναι $E < V_0 \Rightarrow$ ευθύγραμμα μεταβαλλόμενη λύση

$$u_{II}(x) = C e^{+qx} + D e^{-qx}, \quad q = \sqrt{2m[V_0 - E]}/\hbar,$$

όπου $C \neq 0$ και $D \neq 0$ αφού το εύρος του φραγμού είναι a.

III) Είναι $V(x) = 0 \Rightarrow$ ταλαντώμενη λύση

$$u_{III}(x) = F e^{-ik'x} + G e^{+ik'x}, \quad k' = \sqrt{2mE}/\hbar.$$

Ο α' όρος παριστάνει το διαδιδόμενο σωματίδιο κύμα στην III, από δεξιά → αριστερά και ο β το ανακλώμενο και διαδιδόμενο από αριστερά → δεξιά.

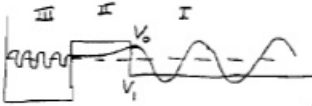
β) Για $E' > V_0$, η λύση είναι πάλι ταλαντώμενη και έχει δύο όρους σε κάθε περιοχή, $q_{II} = \frac{\sqrt{2m(E' - V_0)}}{\hbar}$

Προφανώς $k' > k \Rightarrow \lambda_{III} < \lambda_I$ και $\lambda_I < \lambda_{II}$.

Περιοχή IV για τις δύο περιπτώσεις α, β

$$V(x) = \infty \longrightarrow u_{IV}(x) = 0$$

Για $E = 10\ eV$



3γ) Για ένα επίπεδο αρμονικό κύμα $\psi(x,t) = He^{i(kx-\omega t)}$ η πυκνότητα του ρεύματος μεταφόρας $J = -\frac{i\hbar}{2m}\cdot$

$$\cdot\left\{\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right\} = -\frac{i\hbar}{2m}\left\{H^*e^{-i()}(ik)He^{+i()} - He^{i()}H^*(-ik)e^{-i()}\right\} = \frac{-i\hbar}{2m}\left\{ik\left[H^*H + H^*H\right]\right\} =$$

$$= \frac{\hbar k}{m}|H|^2 = v|H|^2,$$ αφού $\frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = \frac{mv}{m} = v$.

Έτσι, $R = J_R/J_I = \frac{v_I|B|^2}{v_I|A|^2} = \left|\frac{B}{A}\right|^2$

$$T = J_T/J_I = \frac{v_{III}|F|^2}{v_I|A|^2} = \frac{\sqrt{2m_e E}}{\sqrt{2m_e[E-V_1]}}\left|\frac{F}{A}\right|^2.$$

3δ) Είναι $\ln T \sim -\frac{2}{\hbar}\int_{x'}^{x''}\sqrt{2m[V(x)-E]}\,dx$ (όπου $x' = 2a$, $x'' = a$, $dx < 0$) ή $\ln T \sim -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m[V_0-E]}\,a =$

$$= -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2\times(0{,}5\ MeV/c^2)(15-10)\,eV}\times(10\ Å) =$$

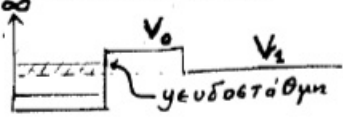
$$= -\frac{2}{\hbar c}\sqrt{1{,}0\times10^6(eV)\times(5\ eV)}\times(10\ Å) =$$

$$= \frac{-2\times2{,}24\times10^3\times10\ eV\cdot Å}{1970\ eV\cdot Å} = -22{,}7 \Rightarrow T \sim 1{,}39\times10^{-10}$$

3ε) Αν $E < V_1$, τότε το σωματίδιο μπορεί να υπάρξει στην III για ορισμένες τιμές του E

Αν $E > V_1$, οι ενεργειακές καταστάσεις είναι συνεχόμενες πάλι.

(σκαχράφηση)



Θέμα 4ο

Σωματίδιο (πρωτόνιο) μέσα σε Τριδιάστατο κουτί (κυβικό) πλευράς $L = 2 \times 10^{-14}\,m$

Η εξίσωση του Schrödinger σε 3-διαστάσεις:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U(\vec{r})\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad \text{όπου } \psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad (1)$$

Η χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger είναι:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r}) + U(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\,\psi(\vec{r}),$$

$$\text{όπου} \quad \psi(\vec{r}) = \psi(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z) \quad (2)$$

$$\text{και} \quad E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \quad (3)$$

4α) Σύμφωνα με τις εξισώσεις (1), (2), (3) και την αντίστοιχη θεωρία έχουμε:

$$\psi_{3,2,1}(x,y,z,t) = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2}\sin\frac{3\pi x}{L}\sin\frac{2\pi y}{L}\sin\frac{\pi z}{L}\,e^{-iE_{321}t/\hbar}$$

$$E_{321} = E_3 + E_2 + E_1 = (3^2 + 2^2 + 1^2)\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL} = 14\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL} = 7\frac{\pi^2\hbar^2}{mL}$$

4β) Η θεμελιώδης κατάσταση έχει ενέργεια:

$$E_{1,1,1} = \frac{3\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \equiv E_0$$

Η α' διεγερμένη κατάσταση έχει ενέργεια:

$$E_{2,1,1} = E_{1,2,1} = E_{1,1,2} = 6\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = 2E_0$$

Η β' διεγερμένη κατάσταση έχει ενέργεια:

$$E_{2,2,1} = E_{2,1,2} = E_{1,2,2} = 9\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = 3E_0$$

Η γ' διεγερμένη κατάσταση έχει ενέργεια:

$$E_{3,1,1} = E_{1,3,1} = E_{1,1,3} = 11\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = \frac{11}{3}E_0$$

4γ) Μια ενεργειακή στάθμη ονομάζεται εκφυλισμένη όταν διαφορετικές καταστάσεις έχουν την ίδια ενέργεια.
Η θεμελιώδης κατάσταση δεν είναι εκφυλισμένη.
Η α', β' & γ' διεγερμένες καταστάσεις έχουν τριπλό εκφυλισμό.